

Villamosságtan I.

főiskolai jegyzet

Írta: Isza Sándor



Debreceni Egyetem

Kísérleti Fizika Tanszék

Debrecen, 2002.

Tartalom

Tartalom	2
Tematikus tárgymutató	5
Bevezetés	8
Matematikai, fizikai alapok	9
Fizikai mennyiség, mennyiségegyenlet	9
Fizikai törvény	9
A fizikai mennyiség definíciója	9
Vektor	10
Mire való a vektor?.....	10
Vektorkomponens	11
Vektoregyenlet, komponensegyenlet	11
Vektor szorzása skalárral	11
Vektor szorzása vektorral (belső, vagy skaláris szorzat)	12
Három, nem egy síkba eső vektor sodrása	12
Vektor szorzása vektorral (külső, vagy vektoriális szorzat)	12
Determináns	12
Mire való a determináns?.....	12
A determinánsok kiszámolása	12
Aldetermináns	13
A determinánsok sorok és oszlopok szerinti kifejtése	13
Mátrix	13
Mire való a mátrix?.....	13
Mátrix szorzása vektorral	14
Lineáris egyenletrendszerek megoldása (Cramer-szabály)	14
Függvény	14
Mire való a függvény?.....	14
Differenciálhatóság	14
Mire való a derivált?.....	15
Integrálhatóság	15
Mire való az integrál?.....	16
Többváltozós függvény differenciálhatósága	16
Vektor–vektor–függvény	17
Görbementi integrál	17
Felületi integrál	17
Térfogati integrál	17
A görbementi és a felületi integrál összefüggése (Stokes-tétel)	18
A térfogati és a felületi integrál összefüggése (Gauss–Osztrogradszkij-tétel)	18
A speciális tartományokon (görbe mentén, felületen, térfogaton) értelmezett integrálok kiszámolása a gyakorlatban	18
Függvényegyenletek	19
Differenciálegyenletek	19
Első fokú, első rendű differenciálegyenlet.....	19
Első fokú, másodrendű differenciálegyenlet.....	20
Differenciáloperátorok	20
Komplex-aritmetika	21
Komplex számok hányadosa.....	22
Komplex számok hatványa.....	22
Komplex számok gyöke.....	23
Komplex konjugált.....	23
A komplexszám abszolút-értékének viszonya a komplex konjugálttal.....	23
Komplex mennyiségek	23
Mire valók a komplex mennyiségek?.....	23
Elektromágneses mező	24
Elektromos mező	24
Elektromos állapot, töltés	24
Elektromos mező	24
Elektromos térerősség	24
A töltésmegmaradás törvénye	25
Elektromos tér	25
Mi kelti az elektromos mezőt?.....	25
Ponttöltés elektromos mezője	25
Gauss-törvény	26
Az elektromos mező munkája, potenciál	27
Kapacitás	29
Az elektromos töltés kvantált jellege: Millikan-kísérlet	29
Az elektromos mező energiája, energiasűrűsége	30
Kölcsönhatási energia	31
Nulla össztöltésű töltésrendszerek	33
A dipólra ható erő	34
A dipólra ható forgatónyomaték	34
A dipól helyzetéből fakadó potenciális energia	34
Poisson-egyenlet	35
Megosztás, polarizáció	38
Elektromos mező dielektrikumokban	39

Áramok szilárd anyagokban (fémek vezetőikben)	40
Áramerősség, áramsűrűség, ellenállás, Ohm törvénye.....	40
Az elektromos áram teljesítménye, Joule–Lenz-törvény.....	42
Áramköri törvények	42
A kontinuitási egyenlet.....	42
A Kirchhoff-törvények.....	43
Relativisztikus mechanika, Lorentz-transzformáció	44
Sebességtranszformáció.....	45
A tömeg transzformációja.....	46
Az elektrosztatikus erőtvény relativisztikus korrekciója, mágneses mező	48
A korrigált erőtvény.....	49
Az Ampère-féle gerjesztési törvény.....	51
Tetszőleges vezetőrendszer által keltett mágneses indukció.....	52
Összefoglalva.....	52
A mágneses mező forrásmentessége.....	55
Az áramátjárta vezetőre ható erő.....	56
A mágneses mező által kifejett forgatónyomaték.....	57
Az elektrosztatikai és a magnetosztatikai dipól összefoglaló összehasonlítása.....	58
Vektorpotenciál.....	58
Elektromágneses indukció	60
A változó elektromos mező által keltett mágneses mező.....	61
Mágneses mező közegben.....	61
A Maxwell-törvények összefoglalása.....	63
Önindukció	63
A mágneses mező energiasűrűsége.....	64
Elektromágneses hullám vezető mentén	65
Energiaáramlás az elektromágneses hullámban.....	66
Összefoglalva.....	66
Lendületáramlás az elektromágneses hullámban.....	66
Az elektromágneses hullám visszaverődése.....	67
A hullám által szállított energia disszipációja.....	67
Osztott paraméterű hálózat	68
Hálózatok	71
Kétpólusok	71
Ellenállás (általánosabb értelemben).....	71
Kondenzátor (általánosabb értelemben).....	71
Tekercs (általánosabb értelemben).....	71
Feszültséggenerátor (feszültségforrás).....	72
Áramgenerátor (áramforrás).....	72
Kapcsoló.....	72
Dióda.....	72
A kétpólusok osztályozása.....	73
Lineáris kétpólus.....	73
Invariáns kétpólus.....	73
Feszültséggel gerjeszthető kétpólus.....	73
Árammal gerjeszthető kétpólus.....	73
Tetszőlegesen gerjeszthető kétpólus.....	74
Kauzális kétpólus.....	74
Passzív kétpólus.....	74
Nonenergikus kétpólus.....	74
Kétpólusok soros és párhuzamos kapcsolása.....	74
Sorosan kapcsolt ellenállások.....	74
Párhuzamosan kapcsolt ellenállások.....	74
Sorosan kapcsolt kondenzátorok.....	75
Párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok.....	75
Sorosan kapcsolt tekercsek.....	75
Párhuzamosan kapcsolt tekercsek.....	75
Sorosan kapcsolt feszültséggenerátorok.....	75
Párhuzamosan kapcsolt feszültséggenerátorok.....	75
Sorosan kapcsolt áramgenerátorok.....	75
Párhuzamosan kapcsolt áramgenerátorok.....	75
Sorosan kapcsolt kapcsolók.....	76
Párhuzamosan kapcsolt kapcsolók.....	76
Sorosan kapcsolt diódák.....	76
Párhuzamosan kapcsolt diódák.....	76
Ideális karakterisztikájú kétpólusok soros és párhuzamos kapcsolásának, helyettesítésének összefoglalása.....	77
Hárompólus (ohmikus kétpólusok csillag- és deltakapcsolása)	77
A kétpólusok gyakorlati megvalósítása	79
Ellenállás.....	79
Kondenzátor.....	79
Tekercs.....	80
Feszültséggenerátor.....	81
Áramgenerátor.....	81
Kapcsoló.....	82
Dióda.....	82
Véges belsőellenállású feszültségforrások soros kapcsolása és helyettesítése.....	83
Véges belsőellenállású feszültségforrások párhuzamos kapcsolása és helyettesítése.....	83

Véges belsővezetésű áramforrások soros kapcsolása és helyettesítése	84
Véges belsővezetésű áramforrások párhuzamos kapcsolása és helyettesítése	84
Sorosan, ill. párhuzamosan kapcsolt véges belsőellenállású és -vezetésű források helyettesítésének összefoglalása.....	85
<i>A feszültség és az áram mérése</i>	85
<i>A teljesítménytétel: Tellegen tétele.....</i>	89
<i>Egyszerű lineáris négy-pólusok.....</i>	90
<i>Sokpólusok</i>	96
<i>Logikai kapuk</i>	96
<i>Egy speciális sokpólus: digitál-analóg konverter.....</i>	97
<i>Nem lineáris négy-pólusok.....</i>	99
<i>Egyenirányítók.....</i>	99
<i>Feszültségstabilizátorok.....</i>	99
<i>Négy-pólus-elmélet</i>	101
<i>Átviteli függvény</i>	101
<i>Lineáris négy-pólus.....</i>	101
<i>Passzív négy-pólus</i>	102
<i>A passzív lineáris négy-pólus paraméterezései.....</i>	102
<i>A szimmetria feltétele a paraméter-mátrixokban</i>	104
<i>A négy-pólusok további jellemzői.....</i>	105
<i>Bemeneti impedancia</i>	105
<i>Kimeneti impedancia</i>	106

Tematikus tárgymutató

elektromágneses mező.....	24
elektromágneses hullám.....	65
elektromágneses hullám lendületsűrűsége.....	66
elektromágneses hullám terjedési sebessége.....	65, 69
elektromágneses hullám terjedési sebessége közegben.....	70
elektromágneses hullám vezető szalagpár mentén.....	65
elektromágneses hullám által szállított energia disszipációja.....	67
illesztett lezárás.....	68
hullámimpedancia.....	67
osztott paraméterű hálózat.....	68
hullámegyenlet.....	69
hullámfüggvény.....	69
telegráf-egyenlet.....	69
vonalmeni átvitel.....	69
vonalmeni ellenállás.....	69
vonalmeni kapacitás.....	69
vonalmeni önindukciós együttható.....	69
elektromágneses hullám visszaverődése.....	67
visszaverődési tényező.....	67
energia-áramerősség.....	66
energiaáramlás elektromágneses hullámban.....	66
energia-áramsűrűség.....	66
Pointing-vektor.....	66
hullámfüggvény.....	69
lendületáramlás az elektromágneses hullámban.....	66
elektromágneses hullám.....	69
elektromágneses indukció.....	60
egyesen vezetőben indukálódó elektromos mező.....	60
eltolódási áram.....	61
Faraday-Lenz-törvény.....	61
indukált elektromotoros erő.....	64
Maxwell-törvények.....	63
anyagegyenletek.....	63
I. Maxwell-törvény.....	63
jobbsodrás.....	51, 61, 63
III. Maxwell-törvény.....	61
jobbsodrás.....	61, 63
Maxwell-törvények összefoglalása.....	63
önindukció.....	63, 64
önindukciós együttható.....	64
szolenoid önindukciós együtthatója.....	64
elektromos mező.....	24
elektromos állapot.....	24
elektromos dipól.....	33
dipól potenciális energiája.....	34
dipólmomentum.....	33
dipólmomentum-sűrűség.....	38
dipórra ható erő.....	34
dipórra ható forgatónyomaték.....	34
elektromos dipóltól származó potenciál és térerősség.....	33
Gauss-féle főhelyzetek.....	33
két ponttöltésből álló dipól.....	33
térfogati dipólmomentum-eloszlás.....	38
elektromos megosztás.....	38
elektromos mező dielektrikumokban.....	39
elektromos szuszceptibilitás.....	39
relatív dielektromos állandó.....	39
síkkondenzátor dielektrikummal kitöltve.....	39
töltött gömbtől származó elektromos mező dielektrikumban.....	39
elektromos mező energiája.....	30
elektromos mező energiasűrűsége.....	31
kölcsönhatási energia.....	31
ponttöltések kölcsönhatási energiája.....	32
elektromos mező energiasűrűsége.....	30, 31
elektromos mező erőtvénye.....	24
elektromos mező forrástörvénye.....	26
Coulomb-törvény.....	26
elektromos mező szemléltetése.....	26
ekvipotenciális felület.....	28
erővonal.....	28
elektromos tér.....	25
elektromos térerősség.....	24
elektromos dipóltól származó térerősség.....	33
elektromos térerősség fluxusa.....	26
ponttöltéstől származó térerősség.....	26
töltött gömbtől származó térerősség.....	36
töltött gömbtől származó térerősség dielektrikumban.....	39
töltött hengertől származó térerősség.....	37
töltött síktól származó térerősség.....	35
elektromos töltés.....	24
elektromosan semleges állapot.....	24
elektromosan töltött állapot.....	24
elektronfelesleg.....	24
Millikan-kísérlet.....	29
elemi töltés.....	30
kvantált jelleg.....	30
negatív töltés.....	24
ponttöltés.....	25
pozitív töltés.....	24
töltéseloszlás.....	25
felületi töltéssűrűség.....	25
ponttöltés.....	25
térfogati töltéssűrűség.....	25
vonalmeni töltéssűrűség.....	25
elektrosztatikus mező munkája.....	27
Gauss-törvény.....	26
konzervatív mező.....	28
Laplace-operátor.....	35
Maxwell-törvények.....	26, 63
anyagegyenletek.....	63
II. Maxwell-törvény.....	26
Maxwell-törvények összefoglalása.....	63
örvénymentesség.....	28
Poisson-egyenlet.....	35
polarizáció.....	38
polarizált dielektrikumtól származó elektromos mező.....	38
ponttöltés elektromos mezője.....	25
ponttöltés mezője.....	26

ponttöltések által egymásra kifejtett erő.....	26
potenciál.....	27
ekvipotenciális felület.....	28
elektromos dipóltól származó potenciál.....	33
polarizált dielektrikumtól származó potenciál.....	38
ponttöltéstől származó potenciál.....	28
potenciál általános definíciója.....	28
töltött gömbtől származó potenciál.....	36
töltött gömbtől származó potenciál dielektrikumban.....	39
töltött hengertől származó potenciál.....	37
töltött síktól származó potenciál.....	35
potenciálkülönbség.....	28
elektromos mező.....	24
mágneses mező.....	48, 50
Ampère-féle gerjesztési törvény.....	51
jobbsodrás.....	51
áramátjárta vezetők által egymásra kifejtett erő.....	56
áramátjárta vezetőre ható erő.....	56
áramerősség SI egysége.....	56
Biot-Savart-törvény.....	53
Biot-törvény.....	53
gerjesztés.....	62
IV. Maxwell-törvény.....	56
körvezetőre ható forgatónyomaték.....	57
Lorentz-erő.....	50
Lorentz-törvény.....	50
jobbsodrás.....	50
mágneses erő.....	50
mágneses indukció.....	50
Biot-Savart-törvény.....	53
Biot-törvény.....	53
körvezetőtől származó mágneses indukció.....	53
tetszőleges vezetőrendszer által keltett mágneses indukció.....	52, 58
toroid által keltett mágneses indukció.....	52
véges hosszúságú szolenoid által keltett mágneses indukció.....	54
végtelen hosszú egyenes vezető által keltett mágneses indukció.....	53
végtelen hosszú szolenoid által keltett mágneses indukció.....	52
végtelen síktól származó mágneses indukció.....	51, 59
mágneses mező által kifejtett forgatónyomaték.....	57
mágneses mező energiasűrűsége.....	64, 65
mágneses mező forrásmertessége.....	65
mágneses mező közegben.....	51
diamágneses anyagok.....	62
ferromágneses anyagok.....	62
domének.....	62
mágneses szuszceptibilitás.....	62
paramágneses anyagok.....	61
mágneses mező szemléltetése.....	50
Indukcióvonal.....	50
mágneses momentum.....	54
mágneses térerősség.....	62
mágneses töltés.....	56
Maxwell-törvények.....	63
anyagegyenletek.....	63
I. Maxwell-törvény.....	51
jobbsodrás.....	51, 63
Maxwell-törvények összefoglalása.....	63
Neumann-törvény.....	56
örvényerősség.....	51
ponderomotoros erő.....	56
vektorpotenciál.....	58
Maxwell-törvények.....	63
I. Maxwell-törvény.....	51
jobbsodrás.....	51, 63
II. Maxwell-törvény.....	26
III. Maxwell-törvény.....	61
jobbsodrás.....	61, 63
IV. Maxwell-törvény.....	56
Maxwell-törvények összefoglalása.....	63
örvényerősség.....	51
fizikai mennyiség.....	9
fizikai mennyiség definíciója.....	9
funkcionális definíció.....	9
konstrukciós definíció.....	9
fizikai törvény.....	9
fluxus.....	17
SI mértékegységrendszer.....	24
skalár-mennyiség.....	9
mennyiségegyenlet.....	9
mérőszám.....	9
mérőszámeqyenlet.....	9
mértékegység.....	9
vektor.....	10
mire való a vektor?.....	10
vektor abszolútértéke.....	10
vektor nagysága.....	10
vektorkomponens.....	11
vetület.....	11
hálózatok.....	71
áram.....	40
áramerősség.....	40
áramerősség SI egysége.....	56
áramirány.....	42
árammérés.....	85
árammérő rajzjele.....	85
Deprez-elv.....	85
ápenódikus haláleset.....	86
leolvasás paralaxis hibája.....	86
sönt-ellenállás.....	86
áramok szilárd anyagokban (fémes vezetőkben).....	40

áramsűrűség	41	kétpólusok gyakorlati megvalósítása	79
vonalméri áramsűrűség	51	kétpólusok osztályozása	73
differenciális Ohm-törvény	41	kondenzátor	29
elektron-gáz	40	gömbkondenzátor	29
átlagos szabad úthossz	40	kapacitás	29
átlagos ütközésmentes időtartam	40	gömbkondenzátor kapacitása	29
ellenállás	41	kapacitás általános értelemben	71
fajlagos ellenállás	41	síkcondenzátor dielektrikummal kitöltve	39
a fajlagos ellenállás hőmérsékleti tényezője	41	síkcondenzátor kapacitása	29
konstantán	41	kondenzátor általános értelemben	71
manganin	41	kondenzátor energija	31
fajlagos vezetőképesség	41	kondenzátor karakterisztikája	71, 79
integrális Ohm-törvény	41	kondenzátor rajzjele	71
kontinuitási egyenlet	42, 43	kondenzátorok paramétere a gyakorlatban	79
Ohm-törvény	43	elektroitt-kondenzátor	80
stacionárius áram	43	elektroitt-kondenzátor polaritásérzékenysége	80
vezetés	41	keramikus kondenzátor	80
vezető	40	kondenzátor átvételése	80
elektromos teljesítmény	42	kondenzátor mint feszültséggenerátor	80
differenciális Joule–Lenz-törvény	42	szikraoltó kondenzátor	81
integrális Joule–Lenz-törvény	42	szűrőkondenzátor	80
Joule–Lenz-törvény	42	kondenzátorok párhuzamos kapcsolása	75
teljesítménysűrűség	42	kondenzátorok soros kapcsolása	75
teljesítménytétel – Tellegen tétele	89	síkcondenzátor	29
feszültség	28	lineáris kétpólus	73
feszültségmérés	85	nonenergikus kétpólus	74
előtét-ellenállás	86	párhuzamos kapcsolás	74
feszültségmérő rajzjele	85	ideális kétpólusok soros és párhuzamos kapcsolása	77
hárompólusok	77	párhuzamosan kapcsolt áramgenerátorok eredője	76
csillag–delta-átalakítás	77	párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredője	74
csillagkapcsolás	77	párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok eredője	75
csillagpont-eltolódás törvénye	88	párhuzamosan kapcsolt tekercsek eredője	75
delta–csillag-átalakítás	78	replusz	74
deltakapcsolás	77	passzív kétpólus	74
háromfázis	89	rezisztív jelleg	71
Millmann-képlet	88	rezisztív kétpólus	73
nullavezeték	89	soros kapcsolás	74
kétpólusok	71	ideális kétpólusok soros és párhuzamos kapcsolása	77
aktív kétpólus	74	sorosán kapcsolt ellenállások eredője	74
árammal gerjeszthető kétpólus	73	sorosán kapcsolt feszültséggenerátorok eredője	75
dinamikus kétpólus	73	sorosán kapcsolt kondenzátorok eredője	75
dióda	72	sorosán kapcsolt tekercsek eredője	75
a dióda rajzjele	72	tekercs	52
anód	72	bekapcsolási jelenség	81
diódák paramétere a gyakorlatban	82	girátor	80
katód	72	kikapcsolási jelenség	81
nyitófeszültség	72	induktív lésés	81
varicap dióda	82	körtekercs	81
varicap dióda rajzjele	83	önindukciós együttható	64
Zener-dióda	83	szolenoid önindukciós együtthatója	64
Zener-dióda rajzjele	83	önindukciós tényező általános értelemben	71
Zener-feszültség	83	szolenoid	64
Zener-letörés	83	szolenoid önindukciós együtthatója	64
ellenállás	41	tekercs általános értelemben	71
áramfüggő ellenállás	79	tekercs karakterisztikája	71, 80
differenciális Ohm-törvény	41	tekercs rajzjele	71
ellenállás általános értelemben	71	tekercsek paramétere a gyakorlatban	81
ellenállás karakterisztikája	71, 79	tekercs mint áramgenerátor	80
ellenállás mérése	85	fojtótekercs	81
ellenállás rajzjele	71	tekercs mint szakadás	80
ellenállások paramétere a gyakorlatban	79	tekercs ohmos ellenállása	80
ellenállás önindukciós együtthatója	79	vasmág	80
ellenállások terhelhetősége	79	örvényáram	80
lítés	79	ponvmág	80
ellenállások párhuzamos kapcsolása	74	tekercsek párhuzamos kapcsolása	75
ellenállások soros kapcsolása	74	tekercsek soros kapcsolása	75
fajlagos ellenállás	41	toroid	52
fajlagos vezetőképesség	41	tetszőlegesen gerjeszthető kétpólus	74
integrális Ohm-törvény	41	Kirchhoff-törvények	43
Ohm-törvény	41	csomóponti törvény	43
vezeték	71	huroktörvény	43
vezeték rajzjele	71	Kirchhoff I. törvénye	43
vezetés	41	csomópont	43
feszültséggel gerjeszthető kétpólus	73	vágat	43
források	73	Kirchhoff II. törvénye	43
áramforrás	72	hurok	43
áramgenerátor	72, 73	vágattörvény	43
áramgenerátor karakterisztikája	72, 82	négyppólusok	90, 101
áramgenerátor rajzjele	72	átviteli függvény	101
áramgenerátorok paramétere a gyakorlatban	81	bemenet	90
áramgenerátorok párhuzamos kapcsolása	75, 84, 85	bemeneti impedancia	105
áramgenerátorok soros kapcsolása	75, 84, 85	karakterisztikus impedancia	106
belsővezetés	82	rövidzártati bemeneti impedancia	105
kapocsáram	82	úresjárati bemeneti impedancia	105
névleges kapocsáram	72, 82	feszültségstabilizátor	100
Norton-féle helyettesítés	82	karakterisztikus impedancia	106
rövidzártati áram	82	kimenet	90
úresjárati feszültség	82	kimeneti impedancia	106
feszültség- és áramgenerátorok soros és párhuzamos kapcsolásának áttekintése	85	karakterisztikus impedancia	106
feszültségforrás	72, 73	rövidzártati kimeneti impedancia	106
feszültséggenerátor	72, 73	úresjárati kimeneti impedancia	106
belsőellenállás	81	közös pont	99
elektromotoros erő	72, 81	lineáris négyppólus	101
feszültséggenerátor karakterisztikája	72, 81	négyppólus elmélet	101
feszültséggenerátor rajzjele	72	passzív négyppólus	90, 102
feszültséggenerátorok paramétere a gyakorlatban	81	lineáris négyppólusok	90
feszültséggenerátorok párhuzamos kapcsolása	75, 83, 85	differenciál kör	93, 95
feszültséggenerátorok soros kapcsolása	75, 83, 85	R–C-kör	93
kapocsfeszültség	81	időállandó	90, 93
rövidzártati áram	81	R–L-kör	95
Thévenin-féle helyettesítés	81	időállandó	95
periodikus források	73	feszültségérősítés	90
ideális kétpólusok soros és párhuzamos kapcsolása	77	feszültségosztó	90, 91, 92
invariáns kétpólus	73	bemenő ellenállás	91
kapcsoló	72	folyamatosan változtatható feszültségosztó	90
kapcsoló rajzjele	72	létraosztó	90
kapcsolók paramétere a gyakorlatban	82	láncbirt	92
belső	82	R–2R-létra	93, 97
pérgés	82	potencióméter	90
kétállapotú kétpólus	72	integráló kör	94
nyitott vagy kikapcsolt állapot	72	R–C-kör	94
zárt vagy bekapcsolt állapot	72	időállandó	94
kauzális kétpólus	74	R–L-kör	94
kétpólus-karakterisztika	71	időállandó	94
áramgenerátor karakterisztikája	72, 82	passzív lineáris négyppólus paramétereinek	102
ellenállás karakterisztikája	41, 71, 79	admittanciaparaméterek	102
feszültséggenerátor karakterisztikája	72, 81	hibridparaméterek	102
kondenzátor karakterisztikája	71, 79	impedanciaparaméterek	102
tekercs karakterisztikája	71, 80	inverz hibridparaméterek	102
		inverz láncparaméterek	102
		láncparaméterek	102
		a láncparaméterek kifejezése a hibridparaméterekkel	103

a láncparaméterek kifejezése az admittanciaparaméterekkel	103
a láncparaméterek kifejezése az impedanciaparaméterekkel	103
a láncparaméterek kifejezése az inverz hibridparaméterekkel	103
a láncparaméterek kifejezése az inverz hibridparaméterekkel	103
átvészeli ellenállás láncparaméterei	107
átvészeli ellenállás láncparaméterei	107
T-tag láncparaméterei	107
T-tag láncparaméterei	107
passzív lineáris négy pólus szimmetriájának feltételei	104
admittanciaparaméterekben	105
hibridparaméterekben	105
impedanciaparaméterekben	104
inverz hibridparaméterekben	105
inverz láncparaméterekben	104
láncparaméterekben	104
szimmetrikus passzív lineáris négy pólus karakterisztikus impedanciája	106
a bemeneti üresjárati és rövidzártati impedanciákkal kifejezve	106
a kimeneti üresjárati és rövidzártati impedanciákkal kifejezve	106
a láncparaméterekkel kifejezve	106
az inverz láncparaméterekkel kifejezve	106
soros ellenállás karakterisztikus impedanciája	107
T-tag karakterisztikus impedanciája	108
-r-tag karakterisztikus impedanciája	108
nem lineáris négy pólusok	99
egyenirányítók	99
egydíszes egyenirányító	99
Grätz-híd	99
kétoldalas egyenirányító	99
tesztjelstabilizátorok	100
potenciálfüggetlen feszültségstabilizátor	100
stabilizálási lényező	101
szimmetrikus négy pólus	104
sokpólusok	96
digitál-analóg-konverter	97
R-2R-létra	93, 97, 98
R-2R-létra bemenő ellenállása	98
logikai kapuk	96
ES-kapu	96
VAGY-kapu	97
strukturálisan nem reguláris hálózat	7
matematikai alapok	95
determináns	12
aldetermináns	13
determinánsok kiszámolása	12
a determinánsok aldeterminánsai szerinti kifejtése	13
Sansz-szabály	12
faktoriális	12
inverzió	12
mire való a determináns?	12
faktoriális	12
függvény	14
differenciálegyenlet	19
differenciálegyenlet fokszáma	19
differenciálegyenlet rendje	19
első fokú, első rendű differenciálegyenlet	19
első fokú, másodrendű differenciálegyenlet	20
határfeltétel	20
integrációs konstans	19
karakterisztikus egyenlet	19
kezdeti feltételek	20
egyváltozós függvény	14
differenciálhatóság	14
derivált	14, 15
mire való a derivált?	15
differenciálhányados	14
differenciálhányados függvény	15
lineáris approximálhatóság	14
integrálhatóság	15
határozott integrál	16
mire való az integrál?	16
speciális tartományokon értelmezett integrálok kiszámolása a gyakorlatban	18
integrálszámítás alapelvei	16
Newton-Leibniz-tétel	16
primitív függvény	16
mire való a függvény?	14
skalár-skalár-függvény	14
függvényegyenlet	19
mire való a függvény?	14
többváltozós függvény	14
differenciálhatóság	16
differenciáloperátorok	20
differenciáloperátorok áttekintése	20
divergencia	20
gradiens	16
Laplace-operátor	21, 35
nabla-vektor	17
rotáció	18
parciális derivált	16
integrálhatóság	17
speciális tartományon értelmezett integrálok	17
felületi integrál	17
felületi integrál kiszámolása a gyakorlatban	18
felületnormális	17
felületvektor	17
Gauss-Osztogradszkij-tétel	18
jobbcsavar	18
jobbsodrás	18
Stokes-tétel	18
görbementi integrál	17
görbementi integrál kiszámolása a gyakorlatban	18
jobbcsavar	18, 50
jobbsodrás	18
Stokes-tétel	18
térfogati integrál	17
Gauss-Osztogradszkij-tétel	18
térfogati integrál kiszámolása a gyakorlatban	18
skalár-vektor-függvény	14
vektor-vektor-függvény	17
komplex aritmetika	21
Euler-féle írásmód	22
imaginárius tengely	22
irányszög	21
képzetes tengely	22
komplex konjugált	23
komplex konjugált kapcsolata az abszolútértékkel	23
komplex szám	22
komplex számok gyöke	23
komplex számok hányadosa	22
komplex számok hatványa	22
komplex számsík	22
reális tengely	22
valós tengely	22

komplex mennyiség	23
lineáris egyenletrendszerek megoldása	14
Cramer-szabály	14
inhomogén egyenletrendszer	14
mátrix	13
fomális vektor	13
mátrix szorzása vektorral	14
mire való a mátrix?	13
ortogonális bázisrendszer	11
számtest	21
vektor	10
balsodrás	12
fomális vektor	12
jobbsodrás	12
komponensegyenlet	14
mátrix szorzása vektorral	14
mire való a vektor?	10
n dimenziós vektor	13
vektor abszolútértéke	10
vektor nagysága	10
vektor szorzása skalárral	11
vektor szorzása vektorral (belső, vagy skalárszorzás)	12
vektor szorzása vektorral (külső, vagy vektorális szorzás)	12
vektoregyenlet	11
vektorkomponens	11
tengely	11
vetület	11
vektortér	25
relativisztikus mechanika	48
Galilei-transzformáció	44
idő-dilatáció	45
inerciarendszer	44
Lorentz-invariáns	49
Lorentz-transzformáció	44, 45
nyugalmi tömeg	48
relativisztikus tömeg	46, 48
sebességtranszformáció	45, 46
távolság-kontrakció	45
tömeg transzformációja	46

Bevezetés

Ez a jegyzet elsősorban a villamosmérnök hallgatók Villamosságtan c. tárgyához íródott segédanyagként, de úgy gondoljuk, hogy mások is haszonnal lapozgathatják elektronikai, elektrodinamikai ismereteik bővítése érdekében.

A jegyzet anyaga két nagyobb egységre bontható:

A néhány oldalon keresztül tárgyalta „Matematikai, fizikai alapok” c. fejezetben értelemszerűen azokat az előismereteket vesszük sorra, amelyek a tényleges téma megértéséhez feltétlenül szükségesek. Ebben a részben korántsem törekedtünk teljességre – már csak azért sem, mert ennek a jegyzetnek semmiképpen nem lehet a célja sem a matematikai, sem fizikai alapkursus helyettesítése. Sokkal inkább fontosnak tartottuk azt, hogy egy helyen megtalálhatók legyenek azok a legfontosabb fogalmak (az értelmezésükkel együtt), amelyekre a tényleges anyag feldolgozása közben feltétlenül szükség lesz, mégpedig egy olyan egységes szemléletben bemutatva, amelyet e-nélkül az Olvasónak több alapkursus valószínűen eltérő szemlélettel előadott ismeretanyagából önállóan kellene integrálnia az itt tárgyalta anyag feldolgozása közben.

A tényleges villamosságtan tananyag keretében először az **elektromos és mágneses mezőkkel** foglalkozunk, hogy az itt kiépített alapfogalmakra támaszkodva tárgyalhassuk a **hálózatelmélet** alapjait. Bár a villamosságtan kurzus tradicionálisan kifejezetten *elméleti jellegű*, megemlíjük azokat a gyakorlati vonatkozásokat is, amelyek az elméleti anyag megértését, a gyakorlatban való alkalmazhatóságát közvetlenül segítik.

Az anyagban számos feladat is található, s természetesen mindegyik a megoldásával együtt. Fontos tudni, hogy ezek egyike sem pusztán illusztráció gyanánt került feldolgozásra, hanem mert rajtuk keresztül, tisztábban vagy éppen gyakorlatiasabban lehetett egy-egy elvi problémát tisztázni. Ebből következően a feladatok megoldásai éppúgy a tananyag részét képezik, mint a jegyzet egyéb részei, a feladatként való felvetés pusztán egy hatékony tárgyalási stílusként szemlélendő.

A könnyebb értelmezhetőség, áttekinthetőség érdekében a jegyzet egészében **kék színnel** kiemelve adjuk meg az új fogalmak megnevezéseit, **pirossal** a legfontosabb összefüggéseket, **barna színnel** a feladatok szövegét, és **zöldes barnával** azokat a megjegyzéseket, amelyeken belül az egyes témakörökben erősen elterjedt hibás vagy káros szemléletet, az esetleges hibás megfontolásokat elemezzük. Természetesen ez utóbbiak megértése – különösen pedig megtanulása – nem szükséges ahhoz, hogy a tananyag elsajátítható legyen, azért szerepeltetjük mégis, mert a hibás ismeretek, a hibás szemlélet jelenléte viszont megakadályozhatja (és tapasztalataink szerint sok esetben meg is akadályozza) a megértést.

Debrecen, 2002. május

Matematikai, fizikai alapok

Fizikai mennyiség, mennyiségegyenlet

A fizikai mennyiségek **mérőszám**ból és **mértékegység**ből állnak. Például: 3 m, $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, 2 V, stb. Ezeket **skalár-mennyiség**eknek is nevezzük. A szokásos írásmóddal: pl.: d , v , U ; $d = 3 \text{ cm}$, $v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $U = 2 \text{ V}$, stb. A fizikai mennyiségek közötti viszonyt (a fizikai definíciókat, törvényeket) ún. **mennyiségegyenletek** formájában fogalmazzuk meg. Például: $m = \rho V$. Ebben m a V térfogaton belüli testrészt tömegét (mérőszámát és mértékegységét együtt), ρ pedig a szóban forgó testrészt sűrűségét (mérőszámát és mértékegységét együtt) jelenti.

Megjegyzés

A mérnöki gyakorlatban elterjedten használatosak az ún. **mérőszámeqyenet**ek. Ezzel a szép, hangzatos megnevezéssel azt a trehányágot szokás legalizálni, mely szerint a mennyiségek helyett csak számokkal számolnak, majd mivel az eredmény általában mégiscsak egy fizikai **mennyiség**, a számolás végén egyszerűen hozzáigyezzük a numerikus eredményhez a **külön megtanult** mértékegységet, ti. ami ebből vagy abból az összefüggésből ki szokott jönni – no persze, csak ha a bemenő adatok mérőszámait is alkalmas egységekhez tartozóan írják be (amit azonban sajnos megintcsak külön meg kell tanulni – mármint, hogy melyik összefüggésbe milyen egységekhez tartozó mérőszámokat kell behelyettesíteni). Ráadásul az efféle mérőszámeqyenetek éppen a jelle-gükből fakadóan a bonyolultabb kifejezések esetében már nehezen értelmezhető (és persze **külön megtanulandó**) konstansokat is tartalmaznak. Íme, egy nagy-on egyszerű, és ezért még nagyon könnyen áttekinthető példa:

$$s = \frac{v}{3,6} \Delta t \text{ [m]}, \text{ ahol } v \text{-t } \frac{\text{km}}{\text{h}} \text{-ban, } \Delta t \text{-t pedig szekundumban kell behelyettesíteni.}$$

Ez alapján az összefüggés alapján aztán a következőképpen számolnak: $v = 72$, $\Delta t = 3 \Rightarrow s = \frac{72}{3,6} \cdot 3 = 60 \text{ m}$.

Mi ebben a jegyzetben ezt az általunk károsnak tartott és **felesleges megterhelést** jelentő gyakorlatot nem követjük, a mérőszámeqyenetek helyett minden esetben **mennyiségegyenletekkel** fogalmazzuk meg állításainkat. Például az előbbi egyszerű összefüggést a következőképpen:

$$s = v \Delta t.$$

Számolni pedig így számolunk vele: $v = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $\Delta t = 3 \text{ s} \Rightarrow s = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 3 \text{ s} = 72 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \cdot 3 \text{ s} = 60 \text{ m}$, vagyis **nem megtanuljuk**, hogy a numerikus eredmény-

hez a szóban forgó esetben a méter mértékegységet kell hozzáfűzni, **hanem kiszámoljuk**. Természetesen nem mindig írjuk ki a mértékegységekkel való számolás menetét részletesen, mint ahogyan a számokkal végzett számolás bizonyos részeit is sok esetben fejben végezzük el, de ilyenkor sem írunk le soha olyasmit, hogy $v = 72$ vagy $\Delta t = 3$, mert ezek további (hallgatólajos?) információk nélkül értelmezhetetlenek, s mint ilyenek, **értelmetlenek** is. Hasonlóan, nem írunk le olyat sem, hogy $\frac{72}{3,6} \cdot 3 = 60 \text{ m}$, mert ez meg egyszerűen **hibás** – éppúgy mint az, hogy $3 \cdot 2 = 600$, noha miközben a 3-at 200-zal megszorozzuk,

$3 \cdot 2$ kiszámolása a lényegi művelet, a százásokat már szinte automatikusan csak utána írjuk az eredménynek, de e mögött az automatizmus mögött is számolás rejlik, amit írásban minden alkalommal jelölünk is, vagyis azt írjuk, hogy $3 \cdot 200 = 600$. Természetesen mindvégig, **kivétel nélkül** így járunk el, akár elméleti számolásokat végzünk, akár ha feladatokat oldunk meg!!!

Fizikai törvény

A fizikai mennyiségek között fennálló valamilyen összefüggés, amelyet többnyire tapasztalati úton (mérésekre támaszkodva) nyerünk, esetenként azonban más, korábban felismert törvényekből, tapasztalatokból logikai úton (matematikai levezetés eredményeképpen). Például tapasztalati tény, hogy vannak olyan anyagok, amelyekből készített testekre teljesül, hogy a tömegük arányos a térfogatukkal. Képletszerűen megfogalmazva: $m \sim V$, vagy $m = \rho V$, ahol ρ az $m \sim V$ arányosság arányossági tényezője (vagyis az a mennyiség, amivel V -t megszorozva m -et kapjuk).

A fizikai mennyiség definíciója

A fizikai mennyiségek definíciói mindig valamilyen **fizikai törvényre épülnek**. Fizikai törvény például, hogy az azonos anyagú testek tömege a térfogatukkal arányos: $m \sim V$, az erre alapozó definíció pedig, hogy az ezen arányosságban szereplő arányossági tényezőt a szóban forgó anyag sűrűségének nevezzük: $m = \rho V$, vagyis mondhatjuk, hogy a sűrűség az a mennyiség, amit a test térfogatával megszorozva megkapjuk a test tömegét. Ez a sűrűség definíciója.

Megjegyzés

- Igen gyakori, hogy a bemutatott esethez hasonlóan az a fizikai törvény, amely valamely mennyiség definíciójának alapjául szolgál, egyszerű arányosság.
- Az arányosságot a későbbiekben is az itt bemutatott formában fogalmazzuk meg, vagyis az ún. **funkcionális definíciós eljárást** részesítjük előnyben a **konstrukciós eljárással** szemben, ami annyit jelent, hogy a definícióban nem azt mutatjuk be, miből és hogyan lehet kiszámolni a definiált mennyiséget, hanem azt, hogy mely fizikai törvény alapján definiálunk, s hogy mire jó, mire használható az, ha a definiált mennyiség értékét ismerjük. Fogalmazhatunk úgy is, hogy a mennyiségeket **nem azért definiáljuk, hogy legyen mit kiszámolni**, hanem azért, hogy ha valahonnan ismerjük a definiált mennyiség értékét (mérésből, más fizikai törvényből), akkor segítségével egyéb, számunkra fontos adatokhoz juthassunk, magát a definíciót pedig úgy fogalmazzuk, hogy éppen ennek a mikéntje domborodjon ki belőle. Ennek szellemében tesszük azt is, hogy az arányosság bemutatásakor nem az arányosságban szereplő mennyiségek hányadosának állandóságára helyezzük a hangsúlyt, hanem a figyelmet a mennyiségek arányos **változására** irányítjuk, vagyis a mennyiségek kapcsolatát **igyekszünk függvénynek láttatni**.

- Igen elterjedten, gyakorlatilag egyeduralkodóan használatos az arányosságra alapozott definíciók olyan jellegű megfogalmazása, mint például: „a sebesség az időegység alatt megtett út”, „a térerősség az egységnyi töltésre ható erő”, „a mágneses indukció az egységnyi áramelemre ható erő”, „az áramerősség az időegység alatt átáramlott töltés”, stb., stb. Vannak aztán tabuként kezelt arányosságok, amelyeket – ki tudja, miért – sosem szokás ebben a formában megfogalmazni, mint például: „a szög az egységnyi sugárhoz tartozó ív”, „a szög szinuszja az egységnyi átfogóra eső befogó”, „a törésmutató a törési szög egységnyi szinuszára eső beesési szög szinusz”, vagy egy barátságosabban hangzó, de valamiért mégsem használatos: „az ellenállás az egységnyi áramerősségre eső feszültség”, stb., stb. Gondolkodás-lélektani szempontból érdekes, hogy akik harcosan védik az első csoportban felsorolt definíciók használhatóságát, egyértelműségét, félreérthetlenségét, azok nagy része is elveti a második csoportban felsorolt definíciók létjogosultságát, mondván „az ellenállás nem feszültség”. Igaz. De a sebesség *sem* út, sem az egységnyi idő alatt megtett út, sem bármiféle más út! És hasonlóan, sem a térerősség, sem a mágneses indukció *nem* erő, az áramerősség *nem* töltés, a szög *nem* ív, a szög szinuszja *nem* befogó, stb. Ezért aztán, amit ezek a definíciók állításként fogalmaznak meg, az egyszerűen *nem igaz*. Ráadásul örök homály fedi, mit is jelent pontosan a bennük szereplő „egységnyi” kitétel. Ha ezt firtatjuk, magyarázatként általában az arányosságra való hivatkozás kerül elő, ami nagyon helyénvaló lenne, a sajnálatos csak az, hogy maguk a „definíciók” ezt meg sem említik, pedig valamennyinek ez az értelme, ez az alapja. Pedig milyen egyszerű lenne a megoldás: a homályos jelentésű „egységnyi” helyett – feltehetően ez lenne hivatott pótolni az arányosságra való hivatkozást – nyíltan kimondva a szóban forgó mennyiségek arányos változására kellene irányítani a figyelmet!

Az ilyen jellegű definíciók „sikere”, az oktatási anyagokban való szinte privilegizált szerepeltetése két dolognak köszönhető: egyrészt annak, hogy rövidke, másrészt, hogy rövidségük ellenére is nyíltan szerepel bennük a háttérben meghúzódó arányosság mindkét szereplője. Ezek a tényszerű, valós előnyök azonban semmivé foszlanak az imént elemzett hátrányok fényében, ti. hogy a bennük megfogalmazott állítások részben *hamisak*, részben *semmitmondóak*, ezért mi a továbbiakban sehol nem fogjuk használni az arányosság ilyen jellegű, bújtatott megfogalmazását.

Szokás megpróbálkozni az ilyen jellegű definíciók tényszerűen hibás állításának kiküszöbölésével a következőképpen: „a sebesség megadja (szokásos még a 'megmutatja' szófordulat is) az egységnyi idő alatt megtett utat”, „a térerősség megadja az egységnyi töltésre ható erőt”, „a mágneses indukció megadja az egységnyi áramelemre ható erőt”, „az áramerősség megadja az időegység alatt átáramlott töltést”, stb., stb. Ezek a megfogalmazások már nem tartalmazzák azt a hamis állítást, hogy a sebesség valamiféle út lenne, a térerősség valamiféle erő lenne, és így tovább, a kérdés tehát már „csak az”, mit is jelent az a kitétel, hogy „megadja”, „megmutatja”. Más persze nem igen jelenthet, mint hogy a sebességet az „egységnyi idővel” megszorozva a hozzátartozó utat kapjuk, a térerősséget az „egységnyi töltéssel” megszorozva a rá ható erőt kapjuk, az áramerősséget az „egységnyi idővel” megszorozva az ezen idő alatt átáramlott töltést kapjuk, stb. No, de akkor meg vajon miért *nem ezt* mondjuk inkább?? Így ugyanis lenne konkrét jelentése, azaz érteni is lehetne... A feltételes mód annak szól, hogy az érthetőséghez még mindig hiányzik, az „egységnyi idő”, „egységnyi töltés”, stb. értelmezése. Vannak olyan tankönyvek, amelyek érzékelik ezt a problémát, és konkrétan fogalmaznak: „a sebesség megadja az 1 s alatt megtett utat”, stb. Amellett, hogy itt is nyitva marad, mit is jelent az, hogy „megadja”, újabb probléma is keletkezik: a sebességfogalom **lényege éppen az**, hogy az 1 s alatt megtett utat annyira, és *csak annyira* „adja meg”, mint a 2 s, 3 s, ... alatt megtett utat, vagy éppen az 0,1 s, 0,2 s, ... alatt megtett utat.

Látjuk tehát, hogy az arányosságra alapozott definícióknak számos hibás változata van forgalomban, amelyek mindegyikében abból fakad a tényszerűen hibás jelleg, hogy mindegyik igyekszik – ki tudja, miért? – megkerülni a definíció alapjául szolgáló arányosság nyílt kimondását.

Vektor

Egy *nem negatív* skalármennyiség és egy irány. Pl.: 3 m, Kelet felé; $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, az asztal közelebb eső sarkától a szoba kijelölt sarka felé; stb. Jelölése: pl.: \bar{r} , \bar{v} , \bar{F} , stb. A skalármennyiséget a **vektor nagyságának** (**abszolútértékének**) hívjuk. Jelölése: pl.: r , v , F , vagy ha ez félreérthető lenne $|\bar{r}|$, $|\bar{v}|$, $|\bar{F}|$, stb. (Félreérthető lehet pl. Δr , mert $|\Delta \bar{r}| = |\bar{r}' - \bar{r}| \neq r' - r = \Delta r$, a vesszős érték tartozik a **későbbi** időponthoz.)

Megjegyzés

- Vannak olyan mennyiségek, amelyekből nem szokás (mert nem lenne egyértelmű) egy irány hozzárendelésével vektort készíteni, de szokás a mennyiség differenciálisan kicsiny értékéhez (megváltozásához) irányt rendelni (mert az már egyértelműen végezhető el). Ilyen pl. a forgásszög, és a felület (I. a felületi integráloknál). Ezeket a vektorok megváltozásának jelölésétől (pl.: $d\bar{r}$) megkülönböztető módon jelöljük: pl.: $d\varphi$ és dA (szemben azzal, ha maga φ , ill. A maga is vektorként értelmezhető lenne, amikor is $d\vec{\varphi}$ -t és $d\vec{A}$ -t íránk).
- Szokás a vektorokat irányított szakaszként definiálni. Ez azonban nem szerencsés, mert bár az irányított szakaszok valóban vektorok, jócskán vannak azonban egészen más jellegű vektorok is, mint pl. a sebesség, a gyorsulás, az erő, a térerősség, a mágneses indukció, stb. Így van ez még akkor is, ha rajzban ezek mindegyikét irányított szakasszal jelenítjük meg. Olyan ez, mint amikor egy térképen az útszéli feszületeket és a templomokat egyaránt egy kereszttel jelöljük, ettől még a templom egészen más marad, mint az útszéli feszület.
- Ugyancsak szokás a szaknyelvben „kötött vektorról”, „szabad vektorról”, sőt a mémóki tankönyvek némelyikében még „csúsztatható vektorról” is beszélni, és az egyes vektormennyiségeket ezekben a kategóriákba gondosan besorolni, az egyes kategóriákra külön-külön szabályokat alkotni a vektorokkal végzett műveletekre. Ezek parazita fogalmak (nincs rájuk szükség, csak zavart keltenek), nem használjuk őket. Ennek megfelelően a vektorfogalomhoz nem rendelünk sem „kezdőpontot”, sem „támadáspontot”, sem pedig végpontot, és ugyanígy természetesen „hatásvonalat” sem. Megjegyezzük, hogy igaz ez még az erő vektorára is, bár a feldolgozott témából fakadóan ebben a jegyzetben sok dolgunk az erővektorral nem lesz.

Mire való a vektor?

Arra, hogy az egyébként csak nehézkesen, összetetten megfogalmazható (geometriai kitételeket is tartalmazó) megállapításainkat rövid, tömör, formális műveletekre alkalmas formában fogalmazhassuk meg. Ahelyett például, hogy azt mondanánk, „az elejtett test úgy mozog, hogy az általa azonos idők alatt befutott szakaszok mind párhuzamosak, és a szabad víz felszínére merőlegesek, a hosszai pedig úgy aránylanak egymáshoz, mint a páratlan számok négyzetei 1-től kezdődően”, mondhatunk egyszerűen azt, hogy az elejtett test a szabad víz felszínére merőleges, állandó gyorsulással mozog. A hitelesség kedvéért fontosnak tartjuk megemlíteni, hogy az idézőjelbe tett, ma már bonyodalmasságnak tűnő megfogalmazást (amiben a lényegyet nem is olyan egyszerű meglátni) nem mi találtuk ki az „elrettentő” példa kedvéért, hanem Galilei a szabadon eső testek mozgásának vizsgálatát összegezve, mert akkoriban még hiányoztak a mozgások leírását áttekinthetővé, egyszerűvé tevő vektormennyiségek.

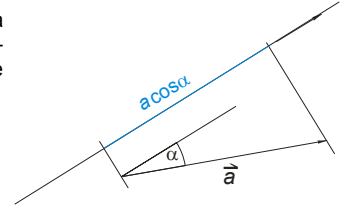
Megjegyzés

Sokak szemében (sajnos, jócskán akadnak köztük fizikatanárok is) a vektorok használata csak felesleges körülményeskedés, ami elfedi a lényegét, bonyolultá, áttekinthetetlenné teszi az egyébként egyszerű dolgokat. Ez igaz is, ha a használatukat olyan esetekre korlátozzuk, ahol nincs rájuk szükség (pl. a középiskolai fizikatananyagban az egyenesvonalú mozgások tárgyalására), no meg, ha a vektorfogalmat olyan felesleges, parazita fogalmakkal terheljük meg, amelyenkről a definíciójánál tett megjegyzésben írtunk. Minden más esetben éppen az ellenkezője igaz, a vektorok használata a tárgyalásmódot jelentősen leegyszerűsíti (hiszen éppen e cél érdekében hozták létre a vektorfogalmat!), sőt, lévén, hogy a vektorok rajzok segítségével *képszerűvé is tehető*, a velük megfogalmazott összefüggések olyanok számára is elérhetővé válnak, akik előtt az algebrai kifejezések erősen absztrakt jellege nehezen leküzdhető akadályként tornyosul.

Vektorkomponens

Egy vektorból és egy önkényesen választott irányból (**tengely**) képzett skalármennyiség: a vektor nagysága szorozva a vektor és az önkényesen választott irány által bezárt szög koszinuszával. A vektorkomponenst a geometriai szemléletesség kedvéért a választott irányba mutató tengelyre vonatkoztatott **vetület**nek is nevezzük (pl.: $a_x = a \cos \alpha$ az x -tengelyre vonatkozó vetület).

Jelölés: Az \vec{a} ortogonális komponenseivel megadva $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2 + a_z \vec{e}_3$.



Megjegyzés

- Kiemelt szerepe van a három egymásra merőleges tengelyre (**ortogonális bázisrendszerre**) vonatkoztatott vetületnek: többek között ezek is egyértelműen meghatározzák magát a vektort, de a vektor nagysága velük fejezhető ki a legkényelmesebben, pl.: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ (Pitagorasz-tétel).
- Szokás a vektorkomponenst az itt bemutatottól eltérően, magát is vektorként definiálni. Ez megtehető éppen, csakhát ezzel a komponens éppen azt a tulajdonságát veszti el, amire való, ti. hogy alkalmazásával lehet a rendkívül tömör formában megfogalmazott vektoregyenletekből a részletesebb számolásra alkalmas skaláregyenleteket előállítani (mégpedig különösebb geometrikus megfontolások nélkül, egyszerű formális műveletek eredményeként, szinte automatikusan).

Vektoregyenlet, komponensegyenlet

A már megismert mennyiségegyenletek vektorokat is tartalmazhatnak (mint azt már megállapítottuk, vannak vektor jellegű fizikai mennyiségek is). Például: $\Delta \vec{r} = \vec{v} \Delta t$ vagy $\vec{F} = E \vec{q}$, stb. Az így megfogalmazott állítások még tömörebbek, mint a skalár mennyiségegyenletekkel megfogalmazottak: két vagy három skalár mennyiséggel megfogalmazható állítást sűrítünk magukba. Igen gyakori, hogy a vektoregyenletekbe sűrített állításokat skaláregyenletekké bontva végezzük el a részletes számolásokat. Ennek két alapvető módszerét szokás használni:

- A vektorok konkrét elrendezését kihasználva geometriai megfontolások alapján kiszámoljuk a vektorok nagyságát, egymással bezárt szögét, stb. (a szinusz-tétel, a koszinusz-tétel, stb. segítségével). Ez a megoldás szemléletesen mutatja a geometriai viszonyokat, de az így végzett számolásokhoz nincs általánosan követhető „recept”, gyakran ötletet is igényelnek.
- A problémában szereplő vektoregyenleteket alkalmasan választott tengelyek mentén *rutinjellegű, formális* eljárással komponensekre bontjuk, s az így nyert skalárkomponens-egyenletekkel számolunk. Ez az eljárás kevésbé szemléletes, viszont mindig végigvihető, nem igényel ötletet. Például a $\Delta \vec{r} = \vec{v} \Delta t$ vektoregyenlet skalárkomponens-egyenletei: $\Delta x = v_x \Delta t$, $\Delta y = v_y \Delta t$, $\Delta z = v_z \Delta t$, ahol x , y , z tetszőlegesen felvett tengelyek. (Természetesen további tengelyeket is felvehetünk, de az így nyert további egyenletek már nem lineárisan függetlenek. Síkbeli probléma esetén csak két lineárisan független egyenletet nyerhetünk.) Ahhoz, hogy az így nyert komponens-egyenletekkel valóban számolhassunk, már csak a bennük szereplő vektorkomponenseket kell előállítanunk, ami a korábban elmondottak szerint ugyancsak rutinfeladatnak tekinthető.

Megjegyzés

- Az itt példaként bemutatott vektoregyenlet egyébként a sebesség helyes definíciójában szereplő arányosságot fogalmazza meg (az elmozdulás és az eltelt idő arányosságát), a példaként már többször idézett sebességdefiníció ugyanis abból a szempontból is hibás, hogy a sebesség vektormennyiség, így a skalármennyiségek arányosságára alapozott definíciója nyilvánvalóan nem is lehet helyes, de legalábbis olyan jellegű további kiegészítéseket igényelne, ami a használatát a vektormennyiségekkel megfogalmazott arányosság helyett rendkívül célszerűtlenné teszi. Erre az eddigiekben nem tértünk ki, és most sem részletezzük, mert a sebesség helyes definíciója ennek a jegyzetnek nem célja, pusztán, mint az arányosságra alapozott definíciók legismertebbikét idéztük többször is.
- Igen elterjedt az a tévhit, amely szerint a vektorok komponensekre bontását mindig egy ortogonális bázisrendszer tengelyeire vonatkozóan kell elvégezni. Ez nem így van, a tengelyként használt irányított egyenesek tetszőleges helyzetben és tetszőleges számban vehetők fel (sokszor elegendő például csak egyet felvenni), és mindegyikkel elkészíthetők a megfelelő komponensek. Az viszont igaz, hogy síkbeli probléma esetén így maximálisan két lineárisan független egyenlethez juthatunk (két különböző síkbeli tengelyt használva), térbeli probléma esetén pedig maximálisan három lineárisan független egyenlethez (a három szabadon választott tengely nem eshet egy síkba).

Vektor szorzása skalárral

Ha λ egy skalármennyiség, \vec{a} pedig egy vektor, akkor a $\lambda \vec{a}$ mennyiségen azt a **vektort** értjük, amelynek nagysága $|\lambda| a$, iránya pedig \vec{a} irányával megegyező,

ha $\lambda > 0$, és \vec{a} irányával ellentétes, ha $\lambda < 0$. Az \vec{a} ortogonális komponenseivel kifejezve: $\lambda \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$.

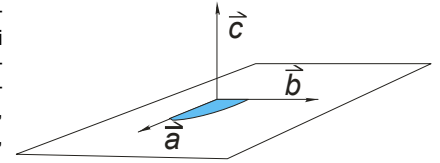
Vektor szorzása vektorral (belső, vagy skaláris szorzat)

Az \vec{a} és \vec{b} vektor $\vec{a}\vec{b}$ -vel jelölt skaláris szorzatán a következő skalármennyiséget értjük: $\vec{a}\vec{b} = ab \cos \alpha$, ahol α az \vec{a} és \vec{b} vektorok által bezárt szög. Tekintettel arra, hogy \vec{a} -nak a \vec{b} irányára vetett vetülete $a_b = a \cos \alpha$, a két vektor skaláris szorzata \vec{a} vetületével is meghatározható, $\vec{a}\vec{b} = a_b b$, és hasonlóan \vec{b} -nek \vec{a} irányára vonatkoztatott vetületével is, $\vec{a}\vec{b} = a b_a$. Bizonyítható, hogy a két vektor skaláris szorzata ortogonális komponenseikkel is kifejezhető a következőképpen:

$$\vec{a}\vec{b} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Három, nem egy síkba eső vektor sodrása

Az \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} nem egy síkba eső vektorokat a felsorolás sorrendjében **jobbsodrásúnak** mondjuk, ha \vec{c} -vel szembenézve \vec{a} -t 180° -nál kisebb, az óramutató járásával ellentétes értelmű forgatással lehet \vec{b} irányába beforgatni (ilyen az ábrán látható három vektor), ellenkező esetben a vektorhármast **balsodrásúnak** nevezzük. Az elnevezés onnan származik, hogy ilyen elrendezésű a jobb-kéz hüvelyk, mutató és középső ujjja is (a felsorolás sorrendjében). Könnyen belátható, hogy a sodrást a vektorok ciklikus cseréje nem változtatja meg, vagyis, ha \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} a felsorolás sorrendjében jobbsodrású, akkor ugyancsak a felsorolás sorrendjében jobbsodrásúak a \vec{b} , \vec{c} , \vec{a} és a \vec{c} , \vec{a} , \vec{b} vektorhármast is.



Vektor szorzása vektorral (külső, vagy vektoriális szorzat)

Az \vec{a} és \vec{b} vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ -vel jelölt skaláris szorzatán azt a **vektort** értjük, amely merőleges mind \vec{a} -ra, mind \vec{b} -re, mégpedig úgy, hogy az \vec{a} , \vec{b} , $\vec{a} \times \vec{b}$ vektorok a felsorolás sorrendjében jobbsodrásúak legyenek, nagysága pedig: $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \alpha$ (ahol α az \vec{a} és \vec{b} vektorok által bezárt szög). Tekintettel arra, hogy \vec{a} -nak \vec{b} -re merőleges vetülete $a_\perp = a \sin \alpha$ a két vektor által felfeszített paralelogramma a „alapjához” tartozó „magassága”, $|\vec{a} \times \vec{b}|$ a szóban forgó paralelogramma „területeként” is szemléltethető, s így igaz, hogy $|\vec{a} \times \vec{b}| = a_\perp b = ab_\perp$. Bizonyítható, hogy a két vektor vektoriális szorzata ortogonális komponenseikkel is kifejezhető a következőképpen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

Determináns

n sorba és n oszlopba rendezett, n^2 darab mennyiséghez a következő módon rendelt egyetlen mennyiség: $\sum_{j=1}^{n!} (-1)^{r_j} a_{1,j_1} a_{2,j_2} \dots a_{n,j_n}$, ahol a_{k,j_i} a k . sor j_i . oszlopában található mennyiség, j_1, j_2, \dots, j_n az $1, 2, \dots, n$ természetes számok egy lehetséges felsorolása (a j -edik), r_j pedig az $1, 2, \dots, n$ természetes számok j_1, j_2, \dots, j_n felsorolásában előforduló **inverziók** száma. Inverzióról akkor beszélünk, ha a j_1, j_2, \dots, j_n felsorolásban egy elemet egy nála nagyobb előz meg. Például a 3, 2, 1 felsorolásban az inverziók száma 3 (mert az utolsó helyen álló 1-et a 3 is és a 2 is megelőzi, továbbá a 2-t is megelőzi a 3), így az $a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1}$ szorzatot negatív előjellel kell az összegzésben szerepeltetni a 3·3-as determináns kifejtésében, mert $(-1)^3 = -1$. Az $1, 2, \dots, n$ természetes számok lehetséges felsorolásainak száma $n!$ (**n -faktoriális**), ahol $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Jelölés: $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$, vagy utalásszerű, rövidített módon $\|a\|$.

Mire való a determináns?

Arra, hogy segítségével bár egyszerű, de a bonyolultság látszatát keltően hosszadalmas számolásokat **egyszerűbben, rövidebben, formálisan** végezhesünk el, jócskán csökkentve ezzel a hosszadalmas számolás közben megnövekvő tévesztési lehetőséget. (Konkrét példát később a lineáris egyenletrendszerek megoldásának bemutatása kapcsán ismertetünk – I. Cramer-szabály). Ahhoz hasonló ez, mint amikor papíron, ceruzával a kezünkben egyszerű formális szabályokat követve osztunk, anélkül, hogy kitenénk magunkat az osztás műveletének értelmezésére támaszkodó hosszadalmas eljárás közben könnyen elkövethető hibáknak. Röviden fogalmazva arra való, hogy bizonyos helyzetekben gyorsan, biztonságosan eredményre vezető módon, automatizáltan számolhassunk.

A determinánsok kiszámolása

A leggyakrabban előforduló 2·2-es és 3·3-as determinánsok kiszámolása rendkívül egyszerű, mechanikus műveletté tehető az ún. **Sarus-szabály** alkalmazásával. Az n tényezős szorzatok tényezőinek összeállítását két lépésben végezzük:

Az első sor elemeitől **balról jobbra** haladva minden újabb tényező megállapításához úgy lépünk újabb sorba és oszlopba, hogy egy sorral lépünk lefelé és egy oszloppal **jobbra**, majd ha eközben az utolsó oszlopból már nem tudunk továbbhaladni, akkor az eggyel lentebbi sort az első oszlopban kezdjük. Az így nyert szorzatokat az összegzésben **pozitív** előjellel vesszük figyelembe. Az így előállított első tag első tényezője az első sor első eleme, az utolsó tag pedig az első sor utolsó eleme.

Az első sor elemeitől *jobbról balra* haladva minden újabb tényező megállapításához úgy lépünk újabb sorba és oszlopba, hogy egy sorral lépünk lefelé és egy oszloppal *balra*, majd ha eközben az első oszlopból már nem tudunk továbbhaladni, akkor az eggyel lentebbi sort az utolsó oszlopban kezdjük. Az így nyert szorzatokat az összegzésben *negatív* előjellel vesszük figyelembe. Az így előállított első tag első tényezője az első sor utolsó eleme, az utolsó tag pedig az első sor első eleme.

A szabály alkalmazásával egy 2·2-es és egy 3·3-as determináns értéke a következő:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}, \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} - a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} - a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2}.$$

Aldetermináns

Az $n \cdot n$ -es determináns j, k -adik eleméhez tartozó al-determinánsának hívjuk azt az $(n-1)(n-1)$ -es determinánst, amely az $n \cdot n$ -es determinánsból a j . sor és k . oszlop törlésével keletkezik.

A determinánsok sorok és oszlopok szerinti kifejtése

Bizonyítható, hogy az $n \cdot n$ -es determináns értéke $\sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{k,j} \|A_{k,j}\|$, ahol $a_{k,j}$ az $n \cdot n$ -es determináns k . sorának j . eleme, $\|A_{k,j}\|$ pedig a k . sor és j . oszlop törlésével előállított al-determináns. Ezt az előállítást a determináns k . sora szerinti kifejtésének hívjuk. Például:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}}_{\|A_{1,1}\|} - a_{1,2} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}}_{\|A_{1,2}\|} + a_{1,3} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}}_{\|A_{1,3}\|}.$$

A determinánsok az oszlopaik szerint is kifejtethetők: $\sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{j,k} \|A_{j,k}\|$. ahol $a_{j,k}$ az $n \cdot n$ -es determináns k . oszlopának j . eleme, $\|A_{j,k}\|$ pedig a k . oszlop és j . sor törlésével előállított al-determináns. Ezt az előállítást a determináns k . oszlopa szerinti kifejtésének hívjuk. Például:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}}_{\|A_{1,1}\|} - a_{2,1} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}}_{\|A_{2,1}\|} + a_{3,1} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}}_{\|A_{3,1}\|}.$$

Mátrix

n sorba és m oszlopba rendezett mennyiség-halmaz. (Hasonló a determinánshoz, azzal a különbséggel, hogy a sorok és oszlopok egyenlő száma nincs megkötve, továbbá, hogy szemben a determinánssal, a mátrixhoz *nem tartozik* egy az elemekből előállított mennyiség.)

Jelölés: $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$.

Formálisan a vektor is tekinthető mátrixnak (mégpedig egy 3·1 típusúnak), amelynek elemei a vektor ortogonális komponensei: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$. Ennek alapján szó-

kás az n sorból és 1 oszlopból álló mátrixokat általánosabb értelemben vett ún. n dimenziós vektornak tekinteni.

Mire való a mátrix?

A mátrixok szerepe egyrészt a vektorokéhoz hasonló: segítségével tömör, sűrített (tehát könnyen memorizálható) formában fogalmazhatók meg olyan állítások, amelyeket nélkülük csak sokkal összetettebb alakban lehetne elmondani, másrészt a szerepük a determinánsokéhoz is hasonló annyiban, hogy velük bizonyos számolásokat formalizált szabályokba rendezhetők, így rövidebbé, biztonságosabbá, áttekinthetőbbé tehetők.

Mátrix szorzása vektorral

Az m oszlopból álló mátrix egy m sorból álló formális vektorral szorozható össze, az eredmény egy $1 \times n$ -es mátrix, vagy ami ugyanaz, egy n komponensű

$$\text{formális vektor: } \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{2,n} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1,k} b_k \\ \sum_{k=1}^m a_{2,k} b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{n,k} b_k \end{pmatrix} . \text{ Az } 1 \times n\text{-es mátrixokat abban (és csakis abban) az értelemben tekintjük vektoroknak, hogy}$$

formailag ugyanúgy adhatók meg, mint a közönséges (térbeli irányt is hordozó) vektorok az ortogonális komponenseikkel.

Lineáris egyenletrendszer megoldása (Cramer-szabály)

Bizonyítható, hogy az

$$\begin{aligned} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n &= b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,n} x_n &= b_n \end{aligned}$$

lineáris **inhomogén egyenletrendszer** (= a (b_1, b_2, \dots, b_n) elemek legalább egyike nem nulla) akkor és csak akkor megoldható, s ha az egyenletrendszer de-

terminánsa, $\|a\| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{2,n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ nem nulla, s hogy ekkor $x_j = \frac{\|a_j\|}{\|a\|}$, ahol $\|a_j\|$ az a determináns, amelyet az egyenletrendszer determinánsából úgy nye-

rünk, hogy a j . oszlopát a $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ formális vektor elemeivel felcseréljük.

Függvény

Lényegében egy hozzárendelés, amely a változó értelmezési tartományán belül minden változóértékhez *egyetlen* függvényértéket rendel.

Egyváltozós: $y = f(x)$, ezt **skalár–skalár-függvény**nek is mondjuk.

Többváltozós: $y = f(x, y, z)$.

Ha (x, y, z) egy vektor ortogonális komponensei, akkor $f(x, y, z) \equiv f(\vec{r})$ -et **skalár–vektor-függvény**nek mondjuk.

Megjegyzés

A matematikai értelemben egzaktul fogalmazott definíció (ami a fentebb felvázolttal azonos tartalmat hordoz) szerint a függvény két halmaz direktszorzatán értelmezett reláció. Ennek részletes kifejtésével most nem foglalkozunk, mert nincs rá szükségünk.

Mire való a függvény?

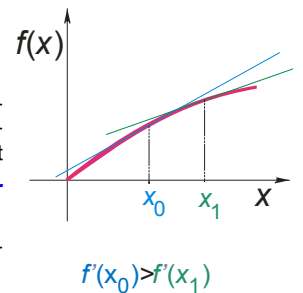
Arra, hogy vele bizonyos mennyiségek kapcsolatát rövid, egyértelmű és áttekinthető, – végül, de nem utolsó sorban – esetenként *képi formában* adhassuk meg. A képi megjelenítés (pl. grafikon) sokszor egyetlen rápillantásra nyújtja azt az információmennyiséget, amit e-nélkül csak bonyodalmas elemzést igénylő formában tudnánk megfogalmazni!

Differenciálhatóság

Elegendően rövid szakaszon minden olyan függvény, amelynek a vizsgált szakaszon nincs szakadása vagy töréspontja, közelíthető lineáris függvénnyel, azaz a függvényérték megváltozása a változó megváltozásával (az előre megkívánt pontossá-gig) *arányosnak* tekinthető: $\Delta f(x) = f'(x_0) \Delta x$, ahol x_0 az a változóérték, amelynek környezetében a függvény változását vizsgáljuk. Az $f'(x_0)$ -al jelölt arányossági tényezőt az $f(x)$ függvény x_0 helyen vett **differenciálhányados**ának (= **derivált**-jának) nevezzük.

Azokat a függvényeket, amelyeknek megváltozása az x_0 változóérték elegendően kicsiny környezetében arányosnak tekint-hető a változóérték megváltozásával, az x_0 pontban **lineárisan approximálható**nak, vagy **differenciálható**nak mondjuk.

Ha egy függvény az értelmezési tartománya minden pontjában differenciálható (azaz minden változóértéknél található olyan



lineáris függvény, amely *annak* a helynek a környezetében „belesimul” a függvénybe), akkor újabb függvényt készíthetünk, oly módon, hogy minden változóértékhez hozzárendeljük a környezetében érvényes arányos változás arányossági tényezőjét. Az így elkészített újabb függvényt az eredeti függvény **differenciálhányados függvény**ének (vagy **deriváltjának**) nevezzük.

Az $y = f(x)$ függvény x_0 helyen vett differenciálhányadosának jelölésére a következő szimbólumokat használjuk: $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \equiv \frac{df(x_0)}{dx} \equiv f'(x_0) \equiv y'_0$, a differenciálhányados-függvény jelölésére pedig a $\frac{df(x)}{dx} \equiv \frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) \equiv y'$ szimbólumokat.

Megjegyzés

A gyakran használatos függvények differenciálhányados-függvényei matematika könyvekben, ill. kézikönyvekben könnyen megtalálhatók. Ezek és néhány egyszerű, könnyen belátható differenciálási szabály ismeretében lényegében tetszőleges differenciálható függvény differenciálhányados-függvénye előállítható. A következőkben összefoglaljuk a legfontosabb differenciálási szabályokat:

Neve	Deriválása
konstansszoros függvény deriválása.	$\frac{d(cf(x))}{dx} = c \frac{df(x)}{dx}$
összegfüggvény deriválása	$\frac{d(f(x) + g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$
szorzatfüggvény deriválása	$\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx}g(x) + \frac{dg(x)}{dx}f(x)$
hányadosfüggvény deriválása	$\frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx} = \frac{\frac{df(x)}{dx}g(x) - \frac{dg(x)}{dx}f(x)}{g^2(x)}$; speciálisan $\frac{d\left(\frac{1}{f(x)}\right)}{dx} = -\frac{1}{f^2(x)} \frac{df(x)}{dx}$
közvetett függvény deriválása	$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx}$
inverz függvény deriválása	ha $y = f(x)$, és $\frac{dy(x)}{dx} \equiv \frac{df(x)}{dx}$, akkor $\frac{dx(y)}{dy} \equiv \frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}$

Mire való a derivált?

Arra, hogy egy-egy rövid szakaszon a viszonylag bonyolult függvényt is egyszerű **arányosságként** (lineáris függésként) szemlélhessük:

$$\Delta f(x) = f'(x_0) \Delta x$$

vagyis arra, hogy segítségével könnyen meghatározhatjuk a függvényérték olyan megváltozásait, amelyek a változóértékek elegendően kicsiny megváltozásához tartoznak.

Ebből a megfogalmazásból kitűnik, hogy a differenciálhányadost nem, mint egy elvont matematikai konstrukciót szemléljük, aminek „a geometriai jelentése” a függvénygörbéhez húzott érintő iránytangense, hanem elsősorban, mint a függvények lineáris közelítésének hatékony eszközét. (Bár ismerjük, és a maguk helyén méltányoljuk is az olyan jellegű matematikai „finomságokat”, mint pl. hogy léteznek az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonos, de egyetlen pontban sem differenciálható függvények, az itt kiemelt szempontból azonban az ilyesmit nem tartjuk fontosnak, figyelmünket ehelyett a „rendesen viselkedő” függvények lineáris közelíthetőségére fordítjuk.)

Integrálhatóság

Az $f(x)$ függvény $[a, b]$ intervallumon bekövetkező megváltozása nyilvánvalóan összerakható az $[a, b]$ intervallum Δx_k szakaszain bekövetkező megváltozásából: $f(b) - f(a) = \Delta f_1 + \Delta f_2 + \dots + \Delta f_n$, ahol Δf_k az $f(x)$ függvény Δx_k szakaszon bekövetkező megváltozása ($k = 1, 2, \dots, n$). Ha Δx_k elegendően kicsiny, és az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallum minden pontjában differenciálható, akkor minden kicsiny Δx_k -hoz tartozó megváltozás $\Delta f_k = f'(x_k) \Delta x_k$ alakban írható, ahol x_k a Δx_k intervallum belső pontja (célszerűen pl. a felező pontja).

Összefoglalva

$$f(b) - f(a) = \Delta f_1 + \Delta f_2 + \dots + \Delta f_n = f'(x_1) \Delta x_1 + f'(x_2) \Delta x_2 + \dots + f'(x_n) \Delta x_n,$$

ahol $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása, x_1, x_2, \dots, x_n pedig a felosztás megfelelő intervallumában felvett változóértékek. Ez az **integrálszámítás alaptétele**, más néven a **Newton–Leibniz-tétel**. Az $f'(x_1)\Delta x_1 + f'(x_2)\Delta x_2 + \dots + f'(x_n)\Delta x_n \equiv \sum_{k=1}^n f'(x_k)\Delta x_k$ mennyiséget az $f'(x)$ függvény $[a, b]$ intervallumra vonatkozó **határozott integráljának** nevezzük.

Jelölés: $f'(x_1)\Delta x_1 + f'(x_2)\Delta x_2 + \dots + f'(x_n)\Delta x_n \equiv \sum_{k=1}^n f'(x_k)\Delta x_k \equiv \int_a^b f'(x) dx.$

Matematikai értelemben ez csak úgy tehető egyértékű hozzárendeléssé (függvénnyé), ha az $\sum_{k=1}^n f'(x_k)\Delta x_k$ összegeknek a határértékét képezzük:

$$\int_a^b f'(x) dx = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f'(x_k)\Delta x_k. \text{ A Newton–Leibniz-tétel így az}$$

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

alakba írható, ahol $f(x)$ az $f'(x)$ függvény **primitív függvénye** (vagyis olyan függvény, amelynek meredeksége minden pontban éppen $f'(x)$).

Megjegyzés

Míg a függvények differenciálhányados függvényét előállítani a differenciálhatóságnál tett megjegyzés szerint néhány egyszerű szabály ismeretében rutinfeladatnak számít, addig a primitívfüggvény megkeresése már sokkal több aprólékos ismeretet igényel, és sok esetben alkalmas intuíció nélkül el sem végezhető (akkor sem, ha maga a határozott integrál egyébként létezik). Igaz viszont, hogy az egyszer valahogyan „megsejtett” primitívfüggvény alkalmassága éppen a deriválás könnyen elvégezhetőségéből fakadóan mindig ellenőrizhető.

Alkalmas primitívfüggvény hiányában (amikor nem tudjuk alkalmazni a Newton–Leibniz-tételt) a határozott integrált a definíciójában szereplő integrálközelítő összeg kiszámolásával határozzuk meg. Bár ez az eljárás matematikai szempontból csak közelítésnek tekinthető, mi az így nyert eredményeket is teljes értékűnek tekintjük (l. a speciális tartományokon értelmezett integrálok kiszámolásánál). További nehézséget jelenthet az integrálközelítő összeggel való számolásban az esetlegesen igen sok tagú összeg előállításának és kezelésének, ez azonban a számítástechnika mai állapota szerint már nem igazán jelenthet problémát. Így aztán egyetlen valódi hátránnyként az marad, hogy a primitívfüggvény hiányában nem tudjuk a határozott integrált mint az integrálási határok függvényét szemlélni, amire gyakran szükség lenne. Ezen úgy szokás segíteni, hogy a különböző integrálási határokkal a közelítő összeg kiszámolásával meghatározott értékekre (mint függvényértékekre) analitikus függvényt illesztünk (amelynek független változója az integrálási határ). Az így kapott közelítések – legalábbis abban a tartományban, amelyben az illesztést végeztük – általában jól használható eredményeket szolgáltatnak.

Mire való az integrál?

Arra, hogy vele a valamely függvény értékeivel képzett $f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_n)\Delta x_n$ típusú szorzat-összegekre vonatkozó állításokat rövid, tömör és egyértelmű formában fogalmazhassuk meg, továbbá, hogy az ilyen jellegű szorzat-összegek értékét gyorsan és könnyen (lehetőleg hosszadalmas számolás nélkül) meghatározhassuk. (L. még a speciális tartományokon értelmezett integrálok kiszámolásánál tett megjegyzést!)

Többváltozós függvény differenciálhatósága

A többváltozós függvényből a vizsgálatra éppen kiszemelt egyetlen változón túliak átmeneti rögzítésével egyváltozós függvényt készíthetünk. Például:

$$f(x) = f(x, y_{\text{rögz}}, z_{\text{rögz}}). \text{ Így a } \left. \frac{df(x, y_{\text{rögz}}, z_{\text{rögz}})}{dx} \right|_{x=x_0} \text{ mennyiség a megszokott módon értelmezhető, az } f(x, y, z) \text{ függvény } x\text{-szerinti } \textit{parciális deriváltjának}$$

nevezzük. Értéke természetesen függ attól, hogy y -t és z -t mely értékeknél rögzítettük.

Jelölés: $\left. \frac{df(x, y_{\text{rögz}}, z_{\text{rögz}})}{dx} \right|_{x=x_0} \equiv \left. \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \equiv \frac{\partial f(x_0, y, z)}{\partial x}.$

A függvény valamely $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ pont körüli teljes megváltozása összerakható az egyes változók szerinti megváltozásokból:

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f(x_0, y, z)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y_0, z)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f(x, y, z_0)}{\partial z} \Delta z.$$

Ez formálisan két vektor skalárszorzatának tekinthető:

$$\frac{\partial f(x_0, y, z)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y_0, z)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f(x, y, z_0)}{\partial z} \Delta z = \underbrace{\left(\frac{\partial f(x_0, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y_0, z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, z_0)}{\partial z} \right)}_{\text{grad } f(\vec{r})} \underbrace{(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}_{\Delta \vec{r}}.$$

Az $f(x, y, z)$ függvény $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ pontbeli parciális deriváltjaiból (mint komponensekből) képzett formális vektort az $f(x, y, z)$ függvény $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ pontbeli **gradiensének** nevezzük:

$$\text{grad } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_0, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y_0, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x, y, z_0)}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Összefoglalva

$$\Delta f(\vec{r}) = \text{grad } f(\vec{r}) \Delta \vec{r}$$

Ez lényegében a $\Delta f(x) = f'(x)\Delta x$ egyváltozós alak többváltozós megfelelője. Maga a gradiens is értelmezhető formálisan: mint egy formális vektor és egy skalárfüggvény skaláris szorzata:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_0, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y_0, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x, y, z_0)}{\partial z} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f(x_0, y, z).$$

A $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ „komponensekkel” értelmezett formális vektort **nabla-vektor**nak nevezzük, és ∇ -val jelöljük: $\nabla \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$. Ezzel $\text{grad } f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$.

Vektor-vektor-függvény

Vektorhoz vektort rendel. Például tipikusan egy térbeli helyhez valamely vektort: $\vec{r} \rightarrow \vec{v}$. Jelölés pl.: $\vec{v}(\vec{r})$, vagy általánosabban: $\vec{f}(\vec{r})$.

Görbementi integrál

Az $\vec{f}(\vec{r})$ vektor-vektor-függvénnyel elkészített $\sum_{j=1}^n \vec{f}(\vec{r}_j) \Delta \vec{r}_j$ összeget a függvény **görbementi integráljának** nevezzük, ahol \vec{r}_j a görbe pontjain fut végig, $\Delta \vec{r}_j$ pedig az \vec{r}_j vektor környezetében a görbébe simuló, a bejárás irányába mutató vektor, amelynek nagysága a görbedarab hossza (elmozdulás).

$$\text{Jelölés: } \int_G \vec{f}(\vec{r}) d\vec{r} = \lim_{\Delta \vec{r}_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \vec{f}(\vec{r}_j) \Delta \vec{r}_j.$$

Felületi integrál

Az $\vec{f}(\vec{r})$ vektor-vektor-függvénnyel elkészített $\sum_{j=1}^n \vec{f}(\vec{r}_j) \overline{\Delta A}_j$ összeget a függvény **felületi integráljának** nevezzük, ahol \vec{r}_j a felület pontjain fut végig, $\overline{\Delta A}_j$ pedig az \vec{r}_j felületi pont környezetében felvett felületdarabra merőleges vektor (**felületnormális**), amelynek nagysága a felületdarab mértéke (**felületvektor**).

$$\text{Jelölés: } \int_F \vec{f}(\vec{r}) d\vec{A} = \lim_{\Delta A_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \vec{f}(\vec{r}_j) \overline{\Delta A}_j.$$

Az $\vec{f}(\vec{r})$ függvény valamely felületre vett integrálját az \vec{f} vektor kérdéses felületre vonatkozó **fluxusának** is nevezzük.

Megállapodás

A vektor-vektor-függvények zárt felületre vett fluxusának számolásakor a felületnormálist mindig **kifelé** irányítjuk.

Térfogati integrál

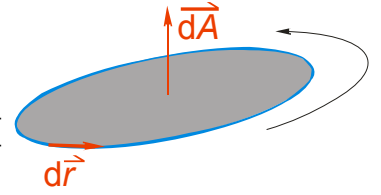
Az $f(\vec{r})$ skálár-vektor-függvény **térfogati integrálján** a $\lim_{\Delta V_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(\vec{r}_j) \Delta V_j$ összeg határértékét értjük, ahol \vec{r}_j a választott térfogat pontjain fut végig, ΔV_j pedig az \vec{r}_j pont körül felvett térfogatelem.

A görbementi és a felületi integrál összefüggése (Stokes-tétel)

Bizonyítható, hogy ha $\vec{f}(\vec{r})$ parciális deriváltjai az F felületen folytonosak, akkor

$$\oint_G \vec{f}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_F (\nabla \times \vec{f}(\vec{r})) d\vec{A},$$

ahol F a G zárt görbe által felfesztett valamely felület, és $d\vec{r}$ -et a korábbi konvenciókon túlmenően úgy kell irányítani, hogy $d\vec{A}$ a körüljárási iránnyal **jobbcsavart** alkosson (**jobbsodrású** legyen), $\nabla \times \vec{f}(\vec{r})$ pedig egy vektor–vektor-



függvény, amely a tér minden pontjához a következő vektort rendeli:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial f_y(\vec{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial f_z(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial f_x(\vec{r})}{\partial y} \end{pmatrix},$$

amit az $\vec{f}(\vec{r})$ vektor–vektor-

függvény **rotáció**jának hívunk, és $\text{rot } \vec{f}(\vec{r})$ -rel is jelöljük.

Összefoglalva

$$\text{A rot } \vec{f}(\vec{r}) \equiv \nabla \times \vec{f}(\vec{r}) \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x(\vec{r}) & f_y(\vec{r}) & f_z(\vec{r}) \end{vmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial f_y(\vec{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial f_z(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial f_x(\vec{r})}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ vektor–vektor–függvény bevezetésével a Stokes-tétel a}$$

$$\boxed{\oint_G \vec{f}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_F \text{rot } \vec{f}(\vec{r}) d\vec{A}}$$

alakba írható.

A térfogati és a felületi integrál összefüggése (Gauss–Ostrogradskij-tétel)

Bizonyítható, hogy ha $\vec{f}(\vec{r})$ parciális deriváltjai a V térfogaton belül folytonosak, akkor

$$\oint_F \vec{f}(\vec{r}) d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{f}(\vec{r}) dV,$$

ahol V az F zárt felületen belül lévő térfogat, $\nabla \cdot \vec{f}(\vec{r})$ pedig a nabla formális vektorral képzett skálár–vektor–függvény, amely a tér minden pontjához a következő skálárértéket rendeli: $\frac{\partial f_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial f_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial f_z(\vec{r})}{\partial z}$. A $\frac{\partial f_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial f_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial f_z(\vec{r})}{\partial z}$ skálárt az $\vec{f}(\vec{r})$ vektor **divergenciájának** hívjuk, és $\text{div } \vec{f}(\vec{r})$ -rel jelöljük.

Összefoglalva

A $\text{div } \vec{f}(\vec{r}) \equiv \nabla \cdot \vec{f}(\vec{r}) \equiv \frac{\partial f_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial f_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial f_z(\vec{r})}{\partial z}$ skálár–skálár–függvény segítségével a Gauss–Ostrogradskij-tétel a

$$\boxed{\oint_F \vec{f}(\vec{r}) d\vec{A} = \int_V \text{div } \vec{f}(\vec{r}) dV}$$

alakba írható.

A speciális tartományokon (görbe mentén, felületen, térfogaton) értelmezett integrálok kiszámolása a gyakorlatban

A gyakorlatban a speciális tartományokon vett integrálokat nagyon gyakran elemi numerikus módszerekkel határozzuk meg. Ez azt jelenti, hogy nem keressük szükségképpen az adott integrandushoz és integrálási tartományhoz illeszkedő primitív függvényt, s így az integrálszámítás alaptételét sem alkalmazhatjuk, hanem az integrál értelmezéséhez visszanyúlva, a következőképpen járunk el:

- Felosztjuk az integrálási tartományt (a görbét, a felületet vagy a térfogatot) olyan kis tartományokra, amelyekben az integrandus konstansnak tekinthető (= relatív megváltozása a kicsiny tartományon belül elhanyagolható), így egy-egy ilyen tartományhoz egyértelműen rendelhető az integrandus egy konkrét értéke
- Az integrandus egy-egy tartományhoz tartozó értékét az integrálban meghatározott módon (skalárral való szorzásként, vektorok skaláris szorzásaként, vektorok külső szorzataként) megszorozzuk a tartomány mértékével (pl. térfogattal, felületvektorral, térfogatelemmel). Ezt a műveletet az integrálási tartomány felosztásában szereplő minden tartománydarabon elvégezzük
- Az előző lépésben nyert szorzatokat összegezzük, és az így nyert értéket tekintjük az integrál értékének.

A gyakorlati problémák jelentős részében elegendő a fentebb részletezett felosztáshoz 1, 2, ..., maximálisan 4, 5 résztartományt választani. Igaz, ahhoz, hogy kevés résztartományal dolgozhassunk, célszerű az adott problémában rejlő specialitásokat (általában szimmetriákat) kihasználni.

Mindez tömören összefoglalva annyit jelent, hogy az integrál értékét azonosnak tekintjük az elegendően részletes felosztáshoz tartozó integrálközelítő összeg értékével.

Megjegyzés

Bár matematikai szempontból az itt ismertetett eljárás semmiképpen sem tekinthető az integrál kiszámítási módjának (hiszen a határátmenet képzése nem szerepel benne, s ennek vizsgálata nélkül még az sem biztos, hogy az így elkészített összegek egyáltalán konvergensek-e, azaz, hogy matematikai értelemben egyáltalán létezik-e a kiszámítani kívánt integrál), a gyakorlatban mégis bátran alkalmazzuk, hiszen fizikai tartalommal általában az összegzendő szorzatok rendelkeznek, s ezért az integrál kiszámítását sokkal inkább az elegendően kicsiny tartományokra vonatkozó összegzés kényelmes elvégzéséhez (és egyáltalán megfogalmazásához) alkalmas *segédeszközként* szemléljük, mintsem az úgymond „pontos” eredményt meghatározó matematikai eljárásé: Annak, hogy egy feszültségmérő nem 1,4 V-ot, nem is 1,41 V-ot, de még csak nem is 1,4142 V-ot mutat, stb., hanem pontosan $\sqrt{2}$ V-ot, semmilyen konkrét fizikai tartalmat nem tudunk tulajdonítani. Fogalmazhatunk úgy is, hogy nem az 1, 2, 3, ..., stb. értékes jegy pontossággal elvégzett mérési eredményt tekintjük a valóságot megtestesítő analitikus számolás közelítésének, hanem éppen *fordítva*, az analitikus számolást tekintjük a mérési eredmények közelítésére alkalmas (és igen hatékony!) eszköznek.

Hasonló a helyzet a differenciálással kapcsolatban is. A fizikus, a mérnök számára a konkrét, mérhető mennyiségek különbségeként értelmezett differenciák, ill. ezek hányadosa bír konkrét tartalommal, a differenciáhányados „csak” egy matematikai segédeszköz (egy nagyon is „kézbeillő” szerszám), amelynek segítségével könnyen, szemléletesen, *függvényként* tudjuk láttatni a különböző változóértékek mellett képzett differenciahányadosok értékét. Ennek megfelelően aztán a fizikusi, mérnöki számításokban például a $\frac{df}{dr} \frac{dr}{dx}$ típusú kifejezésekben bátran egyszerűsítünk dr -rel, holott ez matematikai szempontból majdnem

akkora „bűnnek” számít, mint a $\frac{\log x}{\log y}$ alakú kifejezésben \log -gal egyszerűsíteni (amit persze a fizikus és a mérnök sem tesz, mert hibás eredményhez vezet,

szemben az előbb elmondottak szellemében a differenciáhányadosokat tartalmazó kifejezésben a dr -rel való egyszerűsítés esetével). És miközben így járunk el, még csak azt sem tesszük hozzá, amit a fizikus előadásokon ilyenkor általában – tréfásan élcelődve – mondani szokás, ti. hogy „aztán a matematikusoknak el ne árulják ezt”. Nem tartjuk titokban, és nem is tartjuk bűnös „pongyolaságnak”, hogy a differenciáhányados éppúgy, mint a határozott integrál számunkra – szemben a matematikusi megközelítéssel – nem maga a vizsgálódás tárgya, hanem sokkal inkább alkalmas *eszköze*, amely segíti a tényleges vizsgálati témára vonatkozó megállapításaink áttekinthető, tömör formában történő megfogalmazását.

Függvényegyenletek

A mennyiségekre vonatkozó állításokhoz (mennyiségegyenletekhez) hasonlóan a függvényekre is megfogalmazhatók olyan állítások, amelyeknek nem minden függvény felel meg. Például az $f(x+c) = f(x)$ állítás (ahol $f(x)$ a valós számok halmazán értelmezett függvény, x és c tetszőleges valós számok) igaz az $f(x) = a$ (ahol a konstans) típusú függvények mindegyikére, de hamis az $f(x) = ax + b$ alakú lineáris függvényekre (ahol a és b konstansok). Magukat a függvényekre megfogalmazott állításokat **függvényegyenleteknek**, azokat a *függvényeket* pedig, amelyekkel az állítások igaznak bizonyulnak, a függvényegyenlet megoldásának nevezzük. Szemben a jól megszokott algebrai egyenletekkel, a függvényegyenletek megoldása tehát nem egy mennyiség, hanem egy függvény! További példák: az $f(x) = f(-x)$ egyenletnek a megoldásait páros függvényeknek nevezzük (ilyenek például az $f(x) = A \cos x$ vagy az $f(x) = |x|$), az $f(x) = -f(-x)$ egyenlet megoldásait páratlan függvényeknek nevezzük (ilyenek például az $f(x) = A \sin x$ vagy az $f(x) = ax$ $a \neq 0$ függvények). Mint az előbbi példákban láthatjuk, egy-egy függvényegyenletnek több megoldása is lehet. A fizika szaktudománya szempontjából – és ezen belül a villamosságtan keretében is – rendkívül fontosak azok a függvényegyenletek, amelyek a függvényeknek a deriváltjaival kapcsolatra vonatkozó állításokat fogalmaznak meg. Például a $\frac{df(x)}{dx} = \lambda f(x)$, ahol $\lambda \neq 0$ függvényegyenletnek a megoldása $f(x) = Ae^{\lambda x} + B$, ahol A és B konstansok, $A \neq 0$. A függvényekkel és a deriváltjaival megfogalmazott függvényegyenleteket **differenciálegyenleteknek** nevezzük.

Miközben a mennyiségegyenletek megoldására negyedfokúig bezárólag zárt képlet adható, a függvényegyenletek sokkal inkább „rejtvény jellegűek”: mint mondani szokás, a megoldás menete az, hogy „addig nézzük, míg nem látjuk”. Természetesen létezik néhány alaptípus, amelyeknek megoldását illik fejben tartani. A megoldási algoritmusok tulajdonképpen a közismert alaptípusokra való visszavezetési lehetőségeket tárgyalják.

Differenciálegyenletek

A differenciálegyenletek a fentebb ismertetettek szerint olyan függvényegyenletek, amelyek valamely függvény és annak deriváltjai közötti kapcsolatot fogalmaznak meg. Attól függően, hogy a keresett függvény és deriváltjai melyik legmagasabb hatványon fordulnak elő az egyenletben beszélünk **első-, másod-, harmadfokú, stb. differenciálegyenlet**ről, aszerint pedig, hogy az egyenletben a keresett függvény hányadrendű deriváltjai fordulnak **elő, első-, másod-, harmadrendű, stb. differenciálegyenlet**ekről beszélünk. A villamosságtani tanulmányok szempontjából elegendő néhány egyszerű alaptípus megoldását ismerni.

Első fokú, első rendű differenciálegyenlet

$$a \frac{df(x)}{dx} + bf(x) + c = 0, \text{ ahol } a \neq 0, b \neq 0 \text{ és } c \text{ tetszőleges valós konstansok}$$

Először az egyenlet homogén részének megoldását keressük, mégpedig $f(x) = Ae^{\lambda x}$ alakban. E feltételezett megoldást a homogén egyenletbe visszahelyettesítve: $a \lambda Ae^{\lambda x} + bAe^{\lambda x} = 0$. Ezt az egyenlőséget $Ae^{\lambda x}$ -szel végigosztva láthatjuk, hogy az egyenlet konstansainak ki kell elégíteniük az $a\lambda + b = 0$ feltételt, amiből $\lambda = -\frac{b}{a}$. Az így nyert $a\lambda + b = 0$ **algebrai egyenletet** a differenciálegyenlet **karakterisztikus egyenletének** nevezzük. A karakterisztikus egyenlet meg-

oldásának ismeretében a homogén differenciálegyenlet általános megoldását könnyen felírhatjuk: $f(x) = Ae^{-\frac{b}{a}x} + B$, ahol A és B tetszőleges, ún. **integrációs konstansok**.

Az inhomogén egyenlet megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának visszahelyettesítésével állíthatjuk elő:
$$-\frac{b}{a} \underbrace{Ae^{-\frac{b}{a}x} + bAe^{-\frac{b}{a}x}}_0 + bB + c = 0 \Rightarrow$$

$bB + c = 0 \Rightarrow B = -\frac{c}{b}$. Ezzel az inhomogén egyenlet megoldása végülis: $f(x) = Ae^{-\frac{b}{a}x} - \frac{c}{b}$. Hogy ez valóban megoldás, arról egyszerű visszahelyettesítéssel győződhetünk meg:

$$a \underbrace{\frac{d}{dx} \left(Ae^{-\frac{b}{a}x} - \frac{c}{a} \right)}_{-\frac{b}{a}Ae^{-\frac{b}{a}x}} + b \underbrace{\left(Ae^{-\frac{b}{a}x} - \frac{c}{b} \right)}_{bAe^{-\frac{b}{a}x} - \frac{c}{b} + c} + c = 0.$$

Az A integrációs konstans a konkrét feladat egy további konkrét feltétele, az ún. **kezdeti feltétele**, vagy **határfeltétele** alapján határozható meg. Ez egy konkrét x -értékhez előírja $f(x)$ vagy $\frac{df(x)}{dx}$ konkrét értékét, amiből A meghatározható: $Ae^{-\frac{b}{a}x_0} - \frac{c}{b} = f(x_0) \Rightarrow A = \frac{f(x_0) + \frac{c}{b}}{e^{-\frac{b}{a}x_0}}$, ahol $f(x_0)$ az x_0 változóértékhez

tartozó függvényérték, illetve $-\frac{b}{a}Ae^{-\frac{b}{a}x_0} = f'(x_0) \Rightarrow A = -\frac{af'(x_0)}{b e^{-\frac{b}{a}x_0}}$, ahol $f'(x_0)$ az $f(x)$ függvény deriváltjának x_0 változóértékhez tartozó értéke. A kezdeti

feltétel megnevezés abból származik, hogy igen gyakori az ilyen típusú időtől függő differenciálegyenlet, amikor általában $f(t)$ -nek vagy $f'(t)$ -nek a kezdeti pillanathoz tartozó értéke ismert. Amikor pedig $f(x)$ helytől függ, az integrációs konstans meghatározására általában a függvény vagy deriváltjának az integrálási tartomány határán fennálló értékéből szokás kiindulni, ami magyarázza a határfeltétel megnevezést.

Első fokú, másodrendű differenciálegyenlet

$$a \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + b \frac{df(x)}{dx} + cf(x) + d = 0, \text{ ahol } a \neq 0, b, c \text{ és } d \text{ tetszőleges valós konstansok}$$

Most is az elsőrendű egyenlet megoldásánál megismert módszer szerint járhatunk el. A homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete most másodfokú, így általában két megoldása van:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \alpha + \beta, \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \alpha - \beta, \text{ ahol } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ és } \beta = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Aszerint, hogy $b^2 - 4ac$ értéke pozitív, nulla, ill. negatív, három különböző jellegű megoldáshoz jutunk:

$$b^2 - 4ac > 0$$

Ilyenkor β valós, s a megoldást $f(x) = A_1 e^{(\alpha+\beta)x} + A_2 e^{(\alpha-\beta)x} + B$ alakban keressük, ahol A_1 , A_2 és B integrációs konstansok. B most is az elsőrendű egyenlet-nél megismert módon, az inhomogén egyenletbe való behelyettesítéssel határozható meg:

$$\underbrace{(a(\alpha+\beta)^2 + b(\alpha+\beta) + c)}_0 A_1 e^{(\alpha+\beta)x} + \underbrace{(a(\alpha-\beta)^2 + b(\alpha-\beta) + c)}_0 A_2 e^{(\alpha-\beta)x} + cB + d = 0 \Rightarrow B = -\frac{d}{c}.$$

Ezzel a homogén egyenlet megoldása: $f(x) = A_1 e^{(\alpha+\beta)x} + A_2 e^{(\alpha-\beta)x} - \frac{d}{c}$.

Differenciáloperátorok

A korábbiakban láttuk, hogy a skálár–skálár-függvényekhez éppúgy, mint a skálár–vektor- és a vektor–vektor-függvényekhez különböző differenciálási eljárásokkal újabb függvényeket rendelhetünk, amelyek segítségével bizonyos állításokat könnyebben (rövidebben) tudunk megfogalmazni. Ezeket az eljárásokat összefoglaló néven differenciáloperátoroknak nevezzük:

Neve	Amire alkalmazható	Jelölése	Eredménye
differenciálhányados	egyváltozós skalár–skalár-fv.	$\frac{d}{dx} f(x)$	skalár–skalár-fv. $\frac{df(x)}{dx}$
parciális differenciál-hányados	skalár–vektor-fv.	$\frac{\partial}{\partial x} f(x)$	skalár–vektor-fv. $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$
gradiens	skalár–vektor-fv.	$\text{grad } f(x, y, z)$	vektor–vektor-fv. $\begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix}$
divergencia	vektor–vektor-fv.	$\text{div } \vec{f}(x, y, z)$	skalár–vektor-fv. $\frac{\partial f_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f_z(x, y, z)}{\partial z}$
rotáció	vektor–vektor-fv.	$\text{rot } \vec{f}(x, y, z)$	vektor–vektor-fv. $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial f_y(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial f_z(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(x, y, z)}{\partial y} \end{pmatrix}$
laplace	skalár–vektor-fv.	$\Delta f(x, y, z) \equiv \text{div grad } f(x, y, z)$	skalár–vektor-fv. $\frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2}$

(Itt feltüntettük az eddigiekben még nem szereplő ún. **Laplace-operátort** (ejtsd: laplasz) is, ami a későbbiekben hasznosnak bizonyul majd.)

Komplex-aritmetika

Miközben a vektorok igen hatékonyan bizonyulnak az irányfüggő mennyiségek tárgyalásában, léteznek olyan problémák is, amelyeknél kívánatos lenne, hogy a négy alapművelet ne vezessen ki az operandusok halmazából, vagyis a vektorok halmazában legyen additív és multiplikatív egységelem, azaz létezzenek olyan vektorok, amelyekkel $\vec{a} + \vec{e}_a = \vec{a}$ (additív egységvektor), és $\vec{a}\vec{e}_m = \vec{a}$ (multiplikatív egységvektor). Az előbbi a közösleges vektorműveletekkel is létezik (ti. a nullvektor), a multiplikatív egységvektor azonban sem a belsőszorzatra vonatkozóan, sem a külső szorzatra vonatkozóan nem létezik (a belsőszorzatra vonatkozóan eleve értelmetlen, mert annak az eredménye nem is vektor, a külsőszorzatra vonatkozóan pedig az értelmezéséből fakadóan nem létezhet olyan \vec{e}_m vektor, amellyel $\vec{a} \times \vec{e}_m = \vec{a}$ teljesülne). Így aztán a multiplikatív egységelem hiányában a szorzás inverze (az osztás) sem értelmezhető, vagyis a vektorok az összeadással és egyik szorzással sem alkotnak ún. **testet** (mint mondani szokás: vektorral nem lehet osztani).

Vezessünk most be egy olyan szorzásműveletet, amely rendelkezik alkalmas egységelemmel is! Ehhez először is megállapodunk abban, hogy *síkbeli* (két komponensű) *vektorokra értelmezzük*, s hogy a vektorokat a szóban forgó síkban felvett ortogonális komponenseikkel adjuk meg (az 1 abszolútértékű bázisvektorokat a szokásnak megfelelően jelöljük \vec{i} -vel és \vec{j} -vel). Az új szorzásművelet értelmezéséhez vezessük be a vektorok **irányszöge** fogalmát: az \vec{a} vektor irányszöge az a forgásszög, amellyel a \vec{i} -t az óramutató járásával ellentétes forgásértelemben elforgatva párhuzamossá válik \vec{a} -val. Eszerint \vec{i} irányszöge nulla ($\varphi_i = 0$), \vec{j} -é pedig $\frac{\pi}{2}$ ($\varphi_j = \frac{\pi}{2}$). Az irányszög segítségével az új szorzásműveletet a következőképpen értelmezzük: $\vec{a}\vec{b}$ egy olyan vektor, amelynek nagysága ab (a két vektor nagyságának szorzata), irányszöge pedig a két vektor irányszögének összege. Az így értelmezett szorzásnak van egységeleme, ugyanis az iménti értelmezésből fakadóan $\vec{a}\vec{i} = \vec{a}$.

Miközben ez az újabb szorzásművelet értelemszerűen *más*, mint a korábbiak, ezért jelölésére egy újabb műveleti jelet kellene bevezetnünk, ehelyett, bár észszerűtlen, de a tradicionális utat követve magukat azokat vektorokat fogjuk megkülönböztető módon jelölni, amelyekre nézve a továbbra is hagyományosan jelölt szorzásműveletet a most megadott módon értelmezzük. A vektorok ezen újabb jelölése: \hat{A} . Ennek megfelelően jelöljük a továbbiakban magukat a bázisvektorokat is (\hat{i} és \hat{j}), s így bármely vektort a komponenseikkel kifejezve $\hat{A} = a\hat{i} + b\hat{j}$ alakban írhatjuk. Íme néhány egyszerű (a következőkben hasznosnak bizonyuló) példa az újonnan bevezetett szorzásértelmezésre és a bevezetett jelölések használatára: $\hat{i}^2 \equiv \hat{i}\hat{i} = \hat{i}$ (mert $i = 1$, és $\varphi_i = 0$), $\hat{j}^2 \equiv \hat{j}\hat{j} = -\hat{i}$ (mert $j = 1$, és $\varphi_j = \frac{\pi}{2}$), $\hat{i}\hat{j} = \hat{j}$ (mert $i = 1$, és $j = 1$, továbbá $\varphi_i = 0$, és $\varphi_j = \frac{\pi}{2}$). Az előzőekben már láttuk, hogy $\hat{a}\hat{i} = \hat{a}$, amit fogalmazhatunk úgy is, hogy az \hat{i} -vel való szorzás

a vektort változatlanul hagyja, és könnyen beláthatjuk, hogy a \hat{j} -vel való szorzás pedig $\frac{\pi}{2}$ -vel (az óramutató járásával ellentétes forgásértelemben) elforgatja (mert $j = 1$, és $\varphi_j = \frac{\pi}{2}$). Hasonlóan, az α irányszögű, 1 abszolútértékű vektorral való szorzás a szorzandó α szöggel való elforgatását eredményezi.

Az újonnan bevezetett jelölések felhasználásával két vektor szorzatát a következőképpen írhatjuk:

$$\hat{A}_1 \hat{A}_2 = (a_1 \hat{i} + b_1 \hat{j})(a_2 \hat{i} + b_2 \hat{j}) = a_1 a_2 \hat{i}^2 + b_1 b_2 \hat{j}^2 + \hat{i} \hat{j} (a_1 b_2 + a_2 b_1) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) \hat{i} + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \hat{j},$$

ahol kihasználtuk a disztributivitást, ami szintén megkívánandó ahhoz, hogy a vektorok az újonnan értelmezett szorzásművelettel testet alkossanak. Könnyen beláthatjuk, hogy az így kapott szorzat irányszöge valóban a két tényező irányszögének az összege (ami lényegében annak bizonyítását jelenti, hogy a disztributív tulajdonság az újonnan definiált szorzásra az irányszögek vonatkozásában valóban teljesül):

$$\varphi_{\hat{A}_1 \hat{A}_2} = \operatorname{atg} \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 a_2 - b_1 b_2} = \operatorname{atg} \frac{\frac{b_2 + b_1}{a_2} + \frac{b_1}{a_1}}{1 - \frac{b_1}{a_1} \frac{b_2}{a_2}} = \operatorname{atg} \frac{\operatorname{tg} \varphi_{\hat{A}_2} + \operatorname{tg} \varphi_{\hat{A}_1}}{1 - \operatorname{tg} \varphi_{\hat{A}_1} \operatorname{tg} \varphi_{\hat{A}_2}} = \operatorname{atg} \left(\operatorname{tg} (\varphi_{\hat{A}_2} + \varphi_{\hat{A}_1}) \right) = \varphi_{\hat{A}_1} + \varphi_{\hat{A}_2},$$

ahol kihasználtuk, hogy $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$. Hasonlóan könnyen láthatjuk be azt is, hogy a két vektor szorzatának abszolútértéke a két tényező abszolútértékének szorzata:

$$\begin{aligned} |\hat{A}_1 \hat{A}_2| &= \sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2} = \sqrt{a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + 2a_1 b_2 a_2 b_1} = \sqrt{a_1^2 (a_2^2 + b_2^2) + b_1^2 (b_2^2 + a_2^2)} = \\ &= \sqrt{(b_2^2 + a_2^2)(b_1^2 + a_1^2)} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = |\hat{A}_1| |\hat{A}_2| \equiv A_1 A_2, \end{aligned}$$

(ami lényegében – az irányszögekre tett megállapítással analóg módon – annak belátását jelenti, hogy a disztributív tulajdonság az újonnan definiált szorzásra a vektorok abszolútértékének vonatkozásában is teljesül).

A korábbi („közönséges értelemben” használatos) vektorok bázisvektorokkal való megadására többféle írásmódot is használtunk, például olyat is, amelyben maguk a bázisvektorok meg sem jelentek. Például: $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j} \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Itt a bázisvektorok feltüntetése, ill. a komponensek leírásának speciális geometriai konfi-

gurációja (ti. hogy zárójelben egymás alá írjuk őket) nem szolgál egyebet, mint hogy egyértelműen beazonosítható legyen, az egyes komponensek mely tengelyekre vonatkozó vetületet jelölik. Ez az egyértelmű beazonosíthatóság akkor is megmarad, ha a bázisvektoroknak csupán egyikét írjuk ki: pl. $\vec{A} = a + b\vec{j}$ (vagy $\vec{A} = a\vec{i} + b$), ekkor azonban meg kell állapodnunk abban, hogy az $a + b\vec{j}$ kifejezést *nem* egy skalár és egy vektor összegeként értelmezzük (ami értelmetlen lenne), hanem hogy a skalárként álló mennyiséget \vec{A} -nak az \vec{i} bázisvektorhoz tartozó ortogonális komponenseként szemléljük. Ilyenfajta megállapodást a közönséges vektorműveletek témakörében nem szokás tenni, mert könnyen félreértésre vezethető. Ugyanakkor a testet alkotó vektorműveletekkel használatos vektorokat igen elterjedten szokás $\vec{A} = a + b\vec{j}$ alakban írni, ahol a \vec{j} bázisvektorról le szokás hagyni a vektorjellegre utaló jelet (egyébként *helytelenül*), ami azonban általában nem vezet félreértéshez). Az ilyen módon használatos vektoroknak nemcsak külön jelölésmódja, de külön megnevezése is van **komplex szám**oknak hívjuk őket. Ez a megnevezés részben logikátlan és félrevezető (hiszen *nem számokról*, hanem vektorokról van szó), más szempontból azonban logikus, hiszen a számtestekkel azonos tulajdonságú objektumhalmazról van szó (és **ebben az értelemben** joggal nevezhetők ezek az objektumok is – ti. ezek a vektorok – számoknak). Az írásmódban már meg sem jelenített \vec{i} bázisvektorhoz tartozó tengelyt **valós tengelynek** (**reális tengelynek**), a \vec{j} bázisvektorhoz tartozó tengelyt **képzetes tengelynek** (**imaginárius tengelynek**) nevezzük, az általuk felfeszített síkot **komplex számsíknak**, magát a \vec{j} bázisvektort pedig **imaginárius egységként** is szokás emlegetni.

A most bevezetett szorzásműveletre tekintettel célszerűnek látszik magukat a komplex számokat olyan formában írni, amelyből „automatikusan adódik” a szorzás elvégzésének mikéntje – amely alakra a már jól begyakorolt számolási azonosságok **formális** alkalmazása automatikusan a most definiált eljárást implikálja. Mivel az azonos alapú számok szorzásakor a kitevők összeadódnak, célszerűnek látszik az irányszögeket kitevőbe írni: $\hat{A}_1 = A_1 e^{j\varphi_1}$ és $\hat{A}_2 = A_2 e^{j\varphi_2}$, ahol $A_1 \equiv |\hat{A}_1|$, φ_1 pedig az \hat{A}_1 komplex szám irányszöge, és hasonlóan $A_2 \equiv |\hat{A}_2|$, φ_2 pedig \hat{A}_2 irányszöge. Így valóban szinte „magától értetődőnek” tűnik, hogy $\hat{A}_1 \hat{A}_2 = A_1 e^{j\varphi_1} A_2 e^{j\varphi_2} = A_1 A_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$. Kérdés legfeljebb már csak az lehet, mit keres a kitevőben az irányszög mellett az imaginárius egység, no és, hogy vajon miért éppen e -t választottunk alapként. Az első kérdésre az a válasz, hogy e^{φ} -nek a valós kitevőjű hatványok értelmezése alapján *lenne* határozott jelentése, aminek azonban semmi köze nincs a komplex számokhoz, így j szerepeltetése a kitevőben tulajdonképpen arra való, hogy a hatványkifejezést értelmetlenné tegye, s ezzel alkalmassá arra, hogy egy új dolog jelöléseként szemlélhessük (ti. a szóban forgó komplex szám irányszögének megadásaként), ami azonban formailag emlékeztet arra, hogy az irányszögek a szorzásnál összeadódnak. A formális hatványkifejezés alapján pedig azért választjuk e -t, mert igen gyakori, hogy komplex számokat tartalmazó függvényeket differenciálnunk kell, márpedig a legkényelmesebben differenciálható exponenciális függvény éppen az e alapú.

A komplex számok most megismert jelölési módját **Euler-féle írásmódnak** nevezzük: $a + bj \equiv A e^{j\varphi}$, ahol a korábban elmondottak szerint $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, és $\varphi = \operatorname{atg} \frac{b}{a}$.

Szokás értelmezni az $\operatorname{Re}(a + jb) \equiv a$ függvényt, amely az argumentumában szereplő komplex mennyiséghez annak valós (**Reális**) részét rendeli, továbbá az $\operatorname{Im}(a + bj) \equiv b$ függvényt, amely az argumentumában szereplő komplex mennyiséghez annak képzetes (**Imaginárius**) részét rendeli. Az Euler-féle írásmód használatával $\operatorname{Re}(A e^{j\varphi}) = A \cos \varphi$, és $\operatorname{Im}(A e^{j\varphi}) = A \sin \varphi$.

Komplex számok hányadosa

A szorzás inverz műveleteként definiáljuk: két komplex szám hányadosa az a komplex szám, amivel az osztót megszorozva az osztandót kapjuk eredményül. A szorzásról fentebb elmondottak ismeretében könnyen beláthatjuk, hogy

$$\frac{\hat{A}_1}{\hat{A}_2} = \frac{A_1 e^{j\varphi_1}}{A_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Komplex számok hatványa

A valós számok hatványozásának mintájára definiáljuk, így ha $\hat{A} = A e^{j\varphi}$, akkor $\hat{A}^\alpha = A^\alpha e^{j\alpha\varphi}$, ahol α tetszőleges valós szám.

Komplex számok gyöke

Mivel a komplex számok hatványozását tetszőleges kitevővel értelmeztük, a valós számokra értelmezett gyökvonáshoz hasonlóan az 1-nél kisebb kitevőjű hatványként már a gyökvonást is értelmeztük. Így például, ha $\hat{A} = Ae^{j\varphi}$, akkor $\sqrt[n]{\hat{A}} = \sqrt[n]{A}e^{j\frac{\varphi}{n}}$.

Komplex konjugált

Az $\bar{\hat{A}} = a - jb$ komplex számot az $\hat{A} = a + jb$ szám **komplex konjugáltjának** nevezzük. Az Euler-féle írásmóddal: ha $\hat{A} = Ae^{j\varphi}$, akkor $\bar{\hat{A}} = Ae^{-j\varphi}$.

A komplexszám abszolút-értékének viszonya a komplex konjugálttal

Ha $\hat{A} = Ae^{j\varphi}$, akkor $\sqrt{\hat{A}\bar{\hat{A}}} = \sqrt{Ae^{j\varphi}Ae^{-j\varphi}} = \sqrt{A^2e^{j(\varphi-\varphi)}} = A$. Ha a komplex számot $\hat{A} = a + bj$ alakban adjuk meg, akkor is ugyanezt az eredményt kapjuk: $\sqrt{\hat{A}\bar{\hat{A}}} = \sqrt{(a + jb)(a - jb)} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{A^2} = A$.

Komplex mennyiségek

Lévén a komplex számok tulajdonképpen vektorok (vagyis egy skalármennyiség és egy irány összessége), segítségükkel éppúgy képezhetők fizikai mennyiségek, mint a „közönséges vektorok” esetében. Ezek csak abban különböznek a közönséges vektoroktól, hogy rájuk más szorzás van értelmezve, mégpedig a korábbiak szerint úgy, hogy vele az osztás, továbbá a hatványozás és a gyökvonás is értelmezhető. Mindez a használatuk eltérő módján túl azt is jelenti, hogy használatuk olyan esetekben is jelentős egyszerűsítést eredményezhet, amelyekben a „közönséges vektorok” használata nehézkes. Ugyanakkor ez fordítva is igaz: vannak olyan problémák, amelyek a komplex számokkal csak igen problematikus módon lennének kezelhetők, de amelyek megoldásában a közönséges vektorok igen hatékonyan bizonyulnak. Az előbbire jó példa a váltóáramú hálózatok tárgyalása, ahol a komplex mennyiségként (= alkalmas műveleti sajátságokkal felruházott vektorként) értelmezett feszültségek és áramok használatával tesszük a problémakezelést igen egyszerűvé (miközben a közönséges értelemben használt feszültség- és áramvektorok erre a célra sokkal kevésbé bizonyulnak hatékonyak – éppen a vektorok szorzásának más módon való értelmezése miatt), az utóbbira pedig a töltések által keltett elektromos mező jellemzésére, ill. az áramok által keltett mágneses mező mennyiségi jellemzésére alkalmas adatként definiált elektromos térerősség, ill. mágneses indukció használata.

Megjegyzés

- Szokás a komplex számokat oly módon bevezetni, hogy ilyeneknek nevezzük az $a + bj$ alakú számokat, ahol a és b valós számok, j pedig definíció szerint $\sqrt{-1}$. Ezután be szokás bizonyítani, hogy az így definiált „számok” számtestet alkotnak. A korábban elmondottak szerint a lényegét illetően mindez rendben is van, éppen csak egy kicsit misztikus a dolog „mirevalósága”, elveszik benne a használhatóság mikéjntje, hiszen a fentebb részletezettékből világosan kitudnik, hogy j^2 -re nem -1 , hanem $-\hat{i}$ adódik!!! Más kérdés, hogy éppen ennek alapján $\sqrt{-1}$ is „számként” értelmezhető: $|-1 \cdot \hat{i}| = 1$ és $\varphi_{-1 \cdot \hat{i}} = \pi$, így $|\sqrt{-1 \cdot \hat{i}}| = 1$, és $\varphi_{\sqrt{-1 \cdot \hat{i}}} = \frac{\pi}{2}$, vagyis $\sqrt{-1 \cdot \hat{i}} = \hat{j}$, ami kissé elnagyoltan úgy is interpretálható, hogy $\sqrt{-1}$ egy 1 abszolútértékű szám, amelyet azonban egy másik tengelyen kell mérnünk, mint a -1 -et (ti. az imaginárius tengelyen). Ezzel a megközelítési móddal azonban éppen a dolog lényege merül homályba, ti. az, hogy a vektorokat a számtesttel azonos tulajdonsággal felruházó szorzás értelmezésének következményeként a negatív számból való négyzetgyökvonás semmi mást nem jelent, mint egy **vektor** irányszögének felezését, akárcsak minden más esetben is. Ha ebből indulunk ki, „kapásból” tudunk válaszolni az olyan jellegű kérdésekre, hogy pl. mennyi \sqrt{j} (nyilvánvalóan $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j$, vagy még egyszerűbben $e^{j\frac{\pi}{4}}$).
- Az $a + bj$ alakú írásmód az egyértelműen helyesebb, de terjedősebb (!) $a\hat{i} + b\hat{j}$ alakú írásmód helyett a komoly ellenérvet jelentő terjedelmesség mellett feltehetően arra való hivatkozással terjedt el, s vált szinte kizárólagossá, hogy az \hat{i} -vel való szorzás (lévén \hat{i} a multiplikatív egységelem) a szorzandót „úgyis változatlanul hagyja” ($\hat{i}\hat{i} = \hat{i}$), így a vele való szorzás feltüntetése akár el is hagyható. Ez azonban csak akkor igaz, ha a szorzandó vektor: az $a\hat{i} = a$ nemcsak hogy nem helyes, de értelmetlen is (hiszen egy vektornak egy skalárral való egyenlőségét állítja). Ugyanezen okból az $a + bj$ alakú kifejezésben szereplő $+$ jel nem tekinthető az összeadás műveleti jelének, sokkal inkább a szóban forgó vektor ortogonális komponenseit elválasztó szimbólumnak, ami teljes értékűen lehetne akár vessző is (vagy ha ez a tizedes vesszőre való tekintettel esetleg félreérthető lenne, akkor pl. pontos vessző). Ugyanakkor azonban a $+$ -jel az előbbieknél hatékonyabban **emlékeztet arra**, hogy a vektorok komponenseivel úgy számolhatunk, mint a kéttagú összegek tagjaival (vagyis, hogy a komplex-számok rendelkeznek a disztributív tulajdonsággal). Hasonlóan teszi ezt, mint ahogyan az $e^{j\varphi}$ hatvány kitevőjében szerepeltetett imaginárius egység értelmetlenné teszi magát a hatványozást, de alakjával alkalmasan emlékeztet arra, hogy milyen műveletet kell végezni az irányszögekkel.
- A szakirodalomban az imaginárius egységet többnyire nem j -vel, hanem i -vel jelölik (az imaginárius szó kezdőbetűjére utalva). Ez nem keverendő össze az általunk használt két egységvektor közül a valós tengelyt kijelölő \hat{i} -vel. A villamosságtan témakörében az imaginárius egység jelölésére i helyett (összhangban a mi jelölésünkkel) szinte kizárólagosan j -t használnak, mert a témakörben igen gyakran felbukkanó i -vel jelölt áramerősséggel keveredve könnyen vezethetne félreértésekhez (különösen azzal a hallgatólagos megállapodással tetézve, hogy az imaginárius egység vektorjellegét nem jelölik).

Mire valók a komplex mennyiségek?

Arra, hogy segítségükkel könnyen, egyszerű és nagy részben már amúgy is ismert, jól begyakorolt formális számolási szabályokra támaszkodva tudjunk kezelni irányított mennyiségeket, kihasználva, hogy a síkbeli vektorokat és a velük értelmezett műveleteket számtest-tulajdonságokkal kiegészítő szorzási művelet könnyen kezelhetővé teszi a vektorok forgatását, és nagyságuk bármilyen értelmű transzformációját. A villamosságtan keretében a komplex mennyiségek eme tulajdonságát elsősorban a váltóáramú hálózatok fázis- és amplitúdó viszonyainak elemzésekor fogjuk kihasználni.

Elektromágneses mező

Elektromos mező

Elektromos állapot, töltés

A leghétköznapibb tapasztalatok egyike (*Thales* már időszámításunk előtt 600 körül leírta), hogy bizonyos testeket megdörzsölve olyan állapotba kerülnek, amelyben más hasonló testekre erőt fejtenek ki. Ezt az állapotot esetenként más szokatlan jelenségek is kísérik, például az ilyen állapotban levő testek között néha kisebb-nagyobb hanghatással kísért szikra ugrik át. A testek ilyen állapotát a borostyánkő (ami az ilyen tulajdonságot mutató testek egyike) görög neve után (ελεκτρον) **elektromos állapot**nak nevezték el. Az említett tapasztalatok részletesebb vizsgálatával mennyiségi jellemzőt keresünk az elektromos állapothoz. Bár történetileg ez az ún. fenomenologikus úton történt – vagyis pusztán az említett hatások mennyiségi elemzése alapján, anélkül tehát, hogy a kölcsönhatások mögött meghúzódó mikroszkopikus folyamatokra tekintettel lettek (lehetek) volna –, mi már a mai anyagszerkezeti ismeretekre támaszkodva adjuk meg az elektromos állapot és az elektromos kölcsönhatás jellemzésére alkalmas mennyiségeket. Az ehhez elengedhetetlenül szükséges anyagszerkezeti ismeretek manapság már-már köznapi ismeretnek, az általános műveltség szerves elemének tekinthetők: Az anyagok atomokból épülnek fel, amelyek további alkotókra tagolhatók, ti. atommagra és az atommag környezetében található elektronokra. Az atomokban annyi darab elektron található, amennyi a kérdéses atom rendszáma a Mendelejev-féle periódusos táblában, az atommagokban pedig ugyanennyi proton. (Bár az atommag sokkal bonyolultabb objektum, mintsem hogy protonokból és neutronokból egyszerűen „összerakhatóknak” gondolhassuk, a rá vonatkozó – itt most nem részletezett – természeti törvények alapján az elektromos kölcsönhatás vizsgálatakor bátran használhatjuk ezt a képet.)

A makroszkopikus testek elektromos állapota mindig a benne található atomok fentebb ismertetett, ún. semleges állapotának felbomlásával kapcsolatos: az atom a rendszáma által meghatározott számú elektronból néhányat elveszít, vagy azokhoz néhány „feleslegeset” befogad. Ezt sokszor nem az egyes atomok teszik, hanem valamely nagyobb egységbe szerveződő atomok együttese (molekula, kristályrács – amikor nincs értelme firtatni, hogy a hiányzó elektron pontosan melyik atomból hiányzik, vagy a többlet-elektront pontosan melyik atom fogadta be), ami azonban mit sem változtat azon, hogy egy makroszkopikus test esetében beszélhessünk a benne együttesen található protonok számának (= az atomok rendszámának összege) és az elektronok számának egyenlőségéről (= **elektromosan semleges állapot**), vagy éppen egyenlőtlenségéről (= **elektromosan töltött állapot**). Az elektromos állapot e *kvalitatív* definíciója igen kézenfekvő módon tehető *kvantitatív*vá, azt kell csak meghatároznunk, hogy hány darab elektron hiányát vagy többletét tekintjük egységnyi töltésnek: a $6,25 \cdot 10^{20}$ db proton-többlettel rendelkező testet 1 C (coulomb) **töltés**űnek mondjuk.

Megjegyzés

- A töltést csak ritkán mérjük közvetlenül e definícióra támaszkodva, vagyis a protonok és az elektronok közvetlen leszámllása alapján. Ez a tény azonban nem rontja e definíció használhatóságát: az egyéb mennyiségek egységét rögzítő definíciókat is ritkán használjuk a közvetlen gyakorlatban. Nem szokás például a tömeget a szén 12-es izotópjának párkölcsönhatásban bekövetkező sebességváltozásait vizsgálva mérni, és villamosságtan témaköréhez közelebb eső áramerősséget sem a végtelen hosszúságú egyenes vezető környezetében fellépő erőhatások közvetlen vizsgálata alapján mérjük.
- A töltés itt megadott egysége összhangban áll a töltés ún. **SI** (nemzetközi megállapodással rögzített mértékegységrendszer) egységével, de nem azonos vele. A töltés SI mérési utasítása szerint 1 C az a töltésmennyiség, amit 1 A erősségű áram 1 s alatt szállít (l. később az áramvezetőre ható erő tárgyalásánál!). Az általunk megadott töltésdefiníciót nem a töltés mérési utasításának, hanem ún. fogalmi definíciójának tekintjük.

Elektromos mező

Amikor a töltött testre (más töltött test környezetében) erő hat, valóban nem ér hozzá semmi? Ez a mechanikai kölcsönhatásokon nevelkedett szemléletünk számára legalábbis szokatlan. A kérdésre adandó válasz első sorban attól függ, mit nevezünk valaminek! *Egyszerűbb*, rendezettebb (úgy is mondhatjuk: igazabb) világméretet alakíthatunk ki, ha ezt a jelenséget úgy értelmezzük, hogy a töltött test (amelyre az erő hat) helyén van *valami*, ami hozzáér (úgy fejt ki rá erőt): **elektromos mező**. Az elektromos mező *anyag*i objektum: később ki fog derülni, hogy tömege, energiája van, „tud” az egyik helyről a másikra „menni”, mint a közönséges testek (bár ezt másképpen teszi, mint azok). Ugyanakkor különbözik is azoktól: nincs határozott térfogata (még annyira sem, mint a gázoknak), nem tapintható (bár helyesebb azt mondani, hogy „tapintása” más jellegű érzetet kelt, mint az atomos testeké), stb. Az elektromos mezőnek is vannak azonban jellemző adatai (éppúgy, mint az atomos testeknek), melyek közül a legfontosabbat a következőben ismertetjük.

Elektromos térerősség

Mint már említettük, a töltött testek környezetében más töltött testekre erő hat. Figyelmünket most arra testre fordítva, amelyre az erő hat (ún. próbatöltés), konkrét mérésekkel megállapíthatjuk, hogy ugyanazon próbatöltést különböző helyeken vizsgálva más és más erőt (más-más nagyságút, és általában más-más irányút) tapasztalunk, vagyis ez az erő függ a helytől, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$. Másrészt egyetlen helyen más-más próbatöltést vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy ez az erő függ a próbatest töltésétől, $\vec{F} = \vec{F}(q)$ (ahol q a próbatest töltése), mégpedig azzal arányos. E két tapasztalatot összefoglalva írhatjuk, hogy

$$\vec{F} = \vec{E}(\vec{r})q$$

Ez az **elektromos mező erőtvénye**. Az \vec{E} -vel jelölt arányossági tényező az elektromos mezőt jellemzi az \vec{r} helyvektorú pontban, **elektromos térerősség**-nek nevezzük, SI egysége definíciójából kiolvashatóan: $[E] = \frac{N}{C}$.

Az **elektronfelesleg**gel rendelkező testre ugyanakkora, de ellenkező irányú erő hat, mint az ugyanannyi protonfelesleggel rendelkező testre: a töltés *előjeles* mennyiség – definíció szerint a protonfelesleggel rendelkező test töltését tekintjük **pozitív**nak, az elektronfelesleggel rendelkezőt pedig **negatív**nak.

A töltésmegmaradás törvénye

Zárt rendszer össztöltése állandó. Ez a *tapasztalat* a korábban adott töltésfogalom alapján szinte magától értetődően teljesül – ha feltételezzük, hogy testekben a protonok és az elektronok száma csak úgy változhat meg, hogy ezek a részecskék a vizsgált testből kilépnek, vagy egy másik testről átlépnek a vizsgált testre.

Megjegyzés

Léteznek olyan folyamatok is, amelyekben a protonok, ill. az elektronok száma zárt rendszerben is megváltozik, de ezek kívül esnek a villamosságtan vizsgálódásainak területén (a részecskefizika területére esnek) – ezért is használhatjuk bátran a fentebb megadott töltésdefiníciót. A töltésmegmaradás azonban ezekben a folyamatokban is teljesül, vagyis ilyenkor az „elveszni” látszó részecskék helyett olyan újabbak jelennek meg, amelyek ugyanolyan elektromos tulajdonsággal rendelkeznek, mint a protonok és az elektronok, ami azt jelenti, hogy a megadott töltésdefiníció ezekre az esetekre is fenntartható, csak további kiegészítéseket igényel, amit mi itt nem teszünk meg, mert nincs rá szükségünk.

Elektromos tér

Mint láttuk, az elektromos mező minden pontjához hozzárendelhető a mezőt az adott pontban jellemző térerősség: $\vec{r} \rightarrow \vec{E}(\vec{r})$. Ez a hozzárendelés egy vektorvektor-függvény, s mint ilyen matematikai fogalom, amit **vektortérnek** neveznek, az elektromos mezőhöz rendelt vektorteret (az $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ hozzárendelést) pedig **elektromos térnek**.

Megjegyzés

- Mint a most megadott definícióból kiténik, a megnevezésekben is megkülönböztetjük az anyagi objektumot (amit elektromos mezőnek nevezünk), és az objektumot jellemző, mennyiségileg leíró matematikai fogalmat (amit elektromos térnek nevezünk). Jól érzékelteti a két fogalom közötti különbséget az, hogy az áramlástanban használatos *sebességtér* is vektortér, ami azonban nem tartozik semmiféle „sebességmezőhöz”, mert az az anyagi objektum, aminek a jellemzésére a sebességteret használjuk, maga az áramló közeg.
- Az elektromos mező és az elektromos tér fogalmát a szakirodalom nagy része szinonim értelemben használja – esetenként úgy, hogy mindkét fogalmat minden előforduló esetben ugyanazzal az egy megnevezéssel illeti –, ezzel azonban elveszti a fentebb ismertetett két fogalom tiszta, egyszerű megkülönböztethetőségének nagyon is kézenfekvő lehetőségét.

Mi kelti az elektromos mezőt?

A korábban elemzett tapasztalatokat most már úgy is fogalmazhatjuk, hogy a töltött testeket elektromos mező övezi. A mező szerkezete a **töltéseloszlástól** függ (vagyis attól, hogy az egyes helyek kis környezetében mennyi töltés található). Gyakori, hogy egy-egy hely környezetében a töltés arányos a térfogattal:

$dQ = \rho dV$. A ρ -val jelölt arányossági tényezőt **térfogati töltéssűrűségnek** nevezzük, SI egysége a definíciójából kiolvashatóan: $[\rho] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{C}{m^3}$. Ha a töltéssűrűség a vizsgált problémában elhanyagolhatóan kis térfogatban koncentrálódik, **ponttöltésről** beszélünk. Ez a lehető legegyszerűbb töltéseloszlás (fikció): töltése van, határesetként tekintve kiterjedése nincs (a problémában szereplő egyéb geometriai adatok mellett a töltött test kiterjedésére jellemző adatok elhanyagolhatóan kicsik). Bár a töltések mindig véges térfogatot foglalnak el (a töltésdefiníció szerint jelenlétük általában atomok jelenlétével kapcsolatos), gyakori, hogy valamely hely környezetében megjelenő töltés valamilyen felülettel arányos. Például egy konstans térfogati töltéssűrűségű lemez A felületű darabján $Q = \rho V = \rho \frac{hA}{V} = \frac{\rho h}{V} A = \eta A$ töltés van, ahol h a lemez vastagsága, az η -val jelölt arányossági tényezőt pedig **felületi töltéssűrűségnek** nevezzük. A felületi töltéssűrűség SI egysége a definíciójából ($dQ = \eta dA$) következően $[\eta] = \frac{[Q]}{[A]} = \frac{C}{m^2}$. Hasonlóan **szokás vonalmenti töltéssűrűségről** is beszélni, ti. amikor a töltés egy vonalszakasz hosszával arányos: $dQ = \lambda dl$. Például egy ρ térfogati töltéssűrűségű, A keresztmetszetű huzal $d\ell$ hosszúságú szakaszán $dQ = \rho dV = \rho \frac{Ad\ell}{V} = \frac{\rho A}{V} d\ell = \lambda d\ell$. A λ -val jelölt vonalmenti töltéssűrűség SI egysége a definíciójából következően $[\lambda] = \frac{[Q]}{[\ell]} = \frac{C}{m}$.

Ponttöltés elektromos mezője

Tapasztalatok

- A mező szerkezete gömbszimmetrikus:
 - azonos távolságban ugyanakkora a térerősség: $E = E(r)$.
 - a térerősség radiális irányú: $\vec{E} \parallel \vec{r}$. A pozitív ponttöltéstől elfelé mutat.
- A mezőt keltő töltéstől távolodva a térerősség csökken, mégpedig négyzetesen: $E \sim \frac{1}{r^2}$.
- A térerősség a forrástest töltésével arányos: $E \sim q$.

A három tapasztalatot összefoglalva: $E(\vec{r}) \sim \frac{q}{r^2}$, és $\vec{E} \uparrow \uparrow \vec{r}$, ha $q > 0 \Rightarrow \vec{E} \uparrow \uparrow \vec{r}$; $\vec{E} \uparrow \downarrow \vec{r}$, ha $q < 0$.

Egyetlen képletben:

$$\vec{E}(\vec{r}) \sim \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = k \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

Ez az **elektromos mező forrástörvénye**. A k -val jelölt arányossági tényező neve: Coulomb-állandó, értéke: $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$.

Következmény

A q_1 ponttöltés által a q_2 ponttöltésre kifejtett erő: $\vec{F} = \vec{E} q_2 = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$, ahol \vec{r} a q_1 -től q_2 -höz mutató helyvektor (Coulomb-törvény). További következmény a következőkben tárgyalt Gauss-törvény.

Gauss-törvény

Feladat

Vegyünk körbe egy ponttöltést egy gömbfelülettel, úgy, hogy a ponttöltés a gömb középpontjába essen! Számoljuk ki a térerősség fluxusát a gömbfelületre!

Megoldás

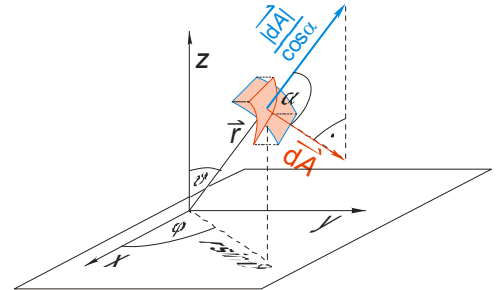
Kihasználjuk a feladatban rejlő szimmetria-tulajdonságokat:

- a felület minden pontja azonos távolságra van a töltéstől, így $\vec{E}(\vec{r})$ a felület minden pontjában $k \frac{q}{r^2}$ nagyságú.
- \vec{E} a felület minden pontjában \perp a felületre $\Rightarrow E_{\perp} = E$.

Így a fluxus: $\Phi_E = E A = k \frac{q}{r^2} 4r^2 \pi = 4k\pi q$, vagyis független a gömb méretétől (csak a töltéstől függ, amit a gömb körülvesz). Vajon, ha más alakú felülettel vennénk körbe, akkor is így lenne?

$$\oint_F \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_F E_n dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} k \frac{q}{r^2} \cos\alpha r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \frac{1}{\cos\alpha} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} k q \sin\vartheta d\vartheta d\varphi =$$

$$= kq [\cos\vartheta]_0^{\pi} [\varphi]_0^{2\pi} = kq(1 - (-1))(2\pi - 0) = 4k\pi q = \frac{1}{\epsilon_0} q.$$



Összefoglalva

$$\oint_F \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad \Leftrightarrow \quad \text{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

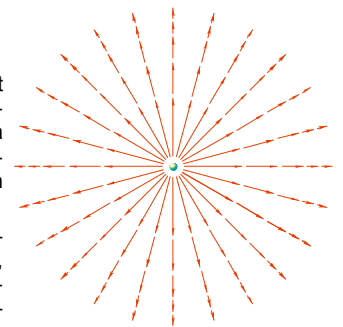
ahol F a V térfogatot határoló zárt felület, és $\text{div} \vec{E}$ jelentése: $\text{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z \equiv \nabla \cdot \vec{E}$.

Ezt az összefüggést **II. Maxwell-törvény**ként, vagy **Gauss-törvény**ként is szokás emlegetni. Mint láttuk, ez a forrástörvény közvetlen következménye. Hasonló (de fordított) gondolatmenettel belátható, hogy belőle következik a forrástörvény, vagyis ez a forrástörvénnyel ekvivalens állítás.

Megjegyzés

- A mechanikai feladatok megoldását általában azzal kezdjük, hogy a bennük szereplő kiskocsit, lejtőt, terhet, csigát stb. lerajzoljuk, majd a rajz segítségével elemezzük a feladat szerinti viszonyokat. Joggal merül fel a kérdés, képszerűvé lehet-e tenni, le lehet-e rajzolni az elektromos mezőt. Nehézséget jelent, hogy az elektromos mezőnek – mint a mezőknek általában – nincs határozott alakja, sőt határozott térfogata sem. Ugyanakkor pontról-pontra jól szemléltethető jellemzője van, ti. a térerősség. Ezeket elegendő sűrűséggel megrajzolva egy térképszerű ábrát kapunk, amelyen kibontakozik szemünk előtt az elektromos mező szerkezete.

Az ilyen jellegű „térképek” rendkívül szemléletesek, megrajolásuk azonban (a sok-sok apró nyilacska miatt) fáradságos. Sokszor elegendő, ha csupán a térerősség irányát adjuk meg az ábrán pontról-pontra, olyan módon, vonalakkal, amelyek érintője minden pontban az ottani térerősséggel párhuzamos. Ha e vonalakat irányítással is ellátjuk, kiolvashatjuk belőlük nemcsak a térerősség állását, de irányát is. Az így megrajzott vonalakat a mező **erővonal**ainak nevezzük.



A forrástörvényből kiolvashatjuk, hogy a ponttöltés elektromos térerőssége a távolság négyzetével arányosan csökken. Mivel az ugyanazon térszöghöz tartozó felület viszont a távolság négyzetével arányosan nő, a felület és a térerősség szorzata konstans. (Tulajdonképpen ezt az állítást fogalmazza meg a Gauss-törvény.) A térszöget is szemléletesen tehetjük a térszög „csúcsából” indított, a térszöget seprűszerűen kitöltő félegyenesekkel. Ezek felületi „sűrűsége” (az a mennyiség, amelyet a felülettel megszorozva megkapjuk a felületet átdőfő félegyenesek számát) – éppen a térszög értelmezése szerint! – pontosan úgy viselkedik, mint az elektromos térerősség: a felület és a térszöget szemléltető félegyenesek felületi „sűrűségének” a szorzata konstans. Kézenfekvőnek látszik ez alapján a térszög csúcsát az elektromos mező forrásához helyezni, és azt mondani, hogy ahányszor kisebbnek látjuk a forrástól távolodva a térszöget szemléltető félegyenesek felületi sűrűségét, éppen annyiszor kisebb azon a helyen az elektromos térerősség is. Az elmondottak szerint a térerősség-fluxus és a térszöget szemléltető félegyenesek fluxusa egyaránt a térszöggel arányos (és egyik sem függ a távolságtól), így ezek

egymással is arányosak. Az arányossági tényező SI egysége a két mennyiség értelmezéséből adódóan: $\frac{[E] [m^2]}{[n] [m^2]} = \frac{\frac{N}{C}}{\text{darab}} = \frac{N}{C}$, vagyis a térerősség egységével egyenlő. (n a térszöget szemléltető félegyenesek felületi sűrűsége.)

Miközben az itt bemutatott arányosság az alkalmasan megrajzolt erővonal-sűrűség fluxusa és a térerősség fluxusa között igen szemléletes (képszerűvé!) teheti a térerősség nagyságának térbeli alakulását, alkalmazásában problémaként jelentkezik, hogy az előbbi (értelmezéséből fakadóan) a térszög szakadásos (lépcsős) függvénye, az utóbbi pedig folytonos: a térszöget növelve a térszög által kijelölt felületet átmetsző félegyenesek száma egy darabig változatlan marad, majd ugrásszerűen nő (ti. mindig 1-gyel), a térerősség fluxusa viszont a térszög folytonos függvénye: $d\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} Q \frac{d\Omega}{4\pi}$. Ennek fényében

ezt az arányosságot szigorúan véve csak egy-egy konkrét térszögre nézve fogalmazhatjuk meg, mert különben az arányossági tényező maga is függ a térszögtől, vagyis a függvénykapcsolat lényegében nem fogalmazható meg arányossággént. Az ebből fakadó nehézségek annál kisebbek, minél nagyobb az önkényesen választható erővonal-sűrűség (ti. annál kisebb az előbb ismertetett lépcsős függvény lépésköze: „madártávlatból” már-már lineáris függvényként szemlélhető), teljesen azonban csak akkor szűnnek meg, ha az erővonal-sűrűséget határesetként végtelennek tekintjük, amikor viszont szerte-foszlának a szemléletes kép által biztosított előnyök.

– Igen elterjedt szokás a fentebb bemutatott arányosságot (az erővonalak definíciójaként) úgy megfogalmazni, hogy „az erővonalak érintője minden pontban a térerősség irányába mutat, és olyan sűrűséggel rajzoljuk meg őket, hogy egységnyi, a térerősségre merőleges felületen annyi haladjon át, amennyi ott a térerősség nagysága”. Ez a „definíció” az arányosság megfogalmazásának szinte minden lehetséges hibájával terhelt:

– Az erővonal-fluxus (= a felületet metsző erővonalak száma) nem lehet a térerősséggel egyenlő, mert a fluxus értelmezéséből fakadóan integrális mennyiség (kiterjedt felületre vonatkoztatott), a térerősség viszont differenciális (pontbeli tulajdonság);

– Az előbbi megállapítás szerint az erővonalak számának és a térerősség nagyságának kapcsolatba állítása helyett helyesebb lenne az erővonalak számát (az erővonal-fluxust) a térerősség fluxusával kapcsolatba állítani. Ekkor sem mondhatjuk azonban, hogy az erővonalak száma egyenlő a térerősség fluxusával, mert az előbbi egysége „darab” (ami a fizikában jellegtelen mennyiséget jelent), az utóbbié viszont $\frac{Nm^2}{C}$.

Ezt a problémát – mint másutt sem – itt sem lehet azzal a megjegyzéssel feloldani, hogy „csak a számértékük egyenlő”: az $5 \frac{m}{s}$ -nak semmivel sincs több köze az 5 N-hoz, mint a 10 N-hoz. Ha viszont valahányszor egy erő nagysága 3 N-nak, 5 N-nak, 10 N-nak, stb. adódik, mindannyiszor egy sebesség

$3 \frac{m}{s}$ -nak, $5 \frac{m}{s}$ -nak, $10 \frac{m}{s}$ -nak, stb. bizonyul, akkor e kapcsolat helyes megfogalmazása az, hogy $v = \alpha F$, ahol $\alpha = 1 \frac{s}{N}$ (és semmi esetre sem az, hogy a

két mennyiség „számértéke” egyenlő)! Így aztán ez a megállapítás akkor is használható marad, ha a sebességet alkalmasint nem $\frac{m}{s}$ -ban, vagy ha az

erőt nem N-ban mérjük, amikor a mérőszámok meglehetősen esetleges egyenlősége nem áll fenn. Mellesleg alkalmasan választott mértékegységek használatával minden arányoságnál beszélhetnénk arról, hogy az egymással arányos mennyiségek mérőszámai egyenlők. Mondhatnánk például, hogy az Ohm-törvény szerint a kétpóluson eső feszültség mérőszáma egyenlő a rajta átfolyó áram mérőszámával. De ilyesmit mondani nem szokás, már csak azért sem, mert a különböző ohmos tagokon mindig újabb és újabb egységválasztásra lenne szükség – éppúgy, mint ahogyan az erővonal-sűrűséggel megfogalmazott állításnál is minden töltéshez más és más léptéket szokás választani (már csak azért is, mert a gyakorlati problémák nagy részénél a $\frac{N}{C}$ -

ban mért térerősség mérőszáma 1-nél kisebb, vagyis a definíciót szó szerint véve egyetlen erővonalat sem kellene rajzolnunk);

– Nem világos, mit jelent az „egységnyi felület” (ennek részletes kifejtését lásd az arányosságra alapozott definícióknál tett megjegyzésnél).

Összegzésképpen megállapíthatjuk, hogy az erővonal-kép a mező szerkezetének szemléltetésére igen hatékonyan alkalmazható, ugyanakkor a mennyiségi megállapítások megfogalmazására az erővonal-sűrűség és az erővonal-szám helyett sokkal alkalmasabb mennyiség a térerősség és a fluxus. Nem szerencsés például a Gauss-törvényt abban a formában fogalmazni, hogy a töltött testből $\frac{1}{\epsilon_0} Q = 4\pi k Q$ darab erővonal indul ki (egyrészt mert $4\pi k Q$ nem

jellegtelen mennyiség, másrészt általában nem is egész szám, ...). Hasonlóan nem szerencsés a polarizálódott dielektrikum belsejében uralkodó kisebb térerősséget azzal indokolni, hogy a dielektrikum felé tartó erővonalak egy része a dielektrikum felületén felhalmozódó polarizációs töltéseken „végződik”. (Részletesebben lásd majd a polarizáció tárgyalásánál.) Ugyanakkor viszont az elektrosztatikus mező örvénymentességének helyes, képszerű megfogalmazása az, hogy az elektrosztatikus mezőben nincsenek önmagukba záródó erővonalak.

– Az erővonalkép elterjedtsége, „sikeressége” – a vele megfogalmazott mennyiségi állítások teljesen felesleges álproblémákat felvető nehézségei ellenére – nagy részben annak köszönhető, hogy létezik „kísérlet” az erővonalak kimutatására. (A kísérlet szót azért tettük idézőjelbe, mert az ilyenkor bemutatott jelenség – bár látványos – általában nem alkalmas arra, hogy arra a kérdésre adjon választ, amelynek vizsgálataképpen a jelenséget be szokás mutatni.) Ehhez a töltött testet szigetelő folyadékba helyezik (többnyire olajba), majd a folyadék felszínére apró szemcsékből álló dielektrikumot szórnak (pl. búzadara). Az elektromos mezőben a dielektrikum-szemcsék polarizálódnak, apró dipólokká válnak (részletesebben lásd a polarizáció tárgyalásánál). Mivel a folyadék felszínén úszó apró dipólok könnyen elmozdulhatnak, az elektromos mező által rájuk kifejített erő, és az általuk egymásra kifejített erők hatására láncokba rendeződnek, amely láncok által kirajzolt kép az erővonalképhez *hasonlatos*. Ugyanakkor ezek a láncok korántsem azonosak az általunk elképzelt erővonalakkal, nem alkalmasak pl. annak eldöntésére, hogy a fentebbi módon definiált erővonalakat honnan indítva, milyen sűrűséggel kell megrajzolnunk. Alaplatannak kell minősítenünk minden olyan jellegű következtetést, miszerint pl. a valamely helyen sűrűbbnek mutatkozó búzadara-láncok a kérdéses helyen fennálló nagyobb térerősségre utalának. Ha már a búzadara-kép alapján a térerősség nagyságára akarunk következtetni, akkor ezt sokkal inkább a búzadara rendezettsége alapján tehetjük meg, mint a búzadara sűrűsége alapján. Igaz viszont, hogy azt nehezebb a kialakult képről kvantitatíve „leolvasni”. De hát ez a kép nem is arra való, hogy belőle mennyiségi következtetéseket vonjunk le. Ha arra használjuk, amire való (ti. szemléltetésre), hatékonyan lehet segítségünkre a különböző töltéselrendeződésekhez tartozó elektromos mező szerkezetéről alkotott képünk kialakításában.

Az elektromos mező munkája, potenciál

Mennyi munkát végez az elektromos mező egy töltött testen, miközben az elmozdul (= mennyi az elektromos erő munkája)?

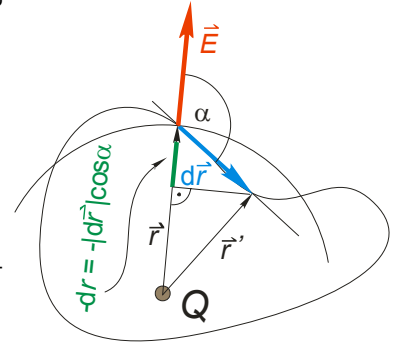
$$W = \int_G \vec{F}_e d\vec{r} = \int_G \vec{E} q d\vec{r} = q \int_G \vec{E} d\vec{r} \left(= q \int_G E_s ds \right).$$

Ponttöltés elektromos mezőjében:

$$W = q \int_G \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = q \int_G k \frac{Q}{r^2} \underbrace{\cos \alpha}_{\frac{\cos \alpha}{|\vec{dr}|}} \frac{dr}{|\vec{dr}|} = kqQ \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = -kqQ \left[\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = -kqQ \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Látjuk, hogy az elektromos mező munkája *független a görbealaktól*, csak a kezdeti és a végpont helyétől függ. Értéke arányos a test töltésével:

$$W = \underbrace{-kQ}_{\Delta U} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) q = -\Delta U q \Rightarrow \Delta U = kQ \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$



A ΔU -val jelölt arányossági tényező neve: **potenciálkülönbség** vagy **feszültség**, SI egysége a definíciójából következően: $[\Delta U] = \frac{[W]}{[Q]} = \frac{J}{C} = V$ (volt).

Látjuk, hogy $\Delta U = U(r_1, r_2)$, vagyis kétváltozós skalár-skalár-függvény. Egyváltozós függvényt készíthetünk belőle, ha az egyik pontot (tipikusan a kezdőpontot – ahonnan a próbatöltést elindulni gondoljuk) egy megállapodással rögzítjük, és ott a függvénynek tetszőlegesen megválasztott értéket (tipikusan 0 V-ot) adunk. Ennek alapján a **ponttöltés elektromos potenciálja** ($r = \infty$ -nél 0-nak választjuk az értékét):

$$U(\vec{r}) = U(r) = k \frac{Q}{r}$$

Általában is igaz, hogy sztatikus elektromos mezőben: $\int_{G_1} \vec{E} d\vec{r} = \int_{G_2} \vec{E} d\vec{r}$, vagyis a sztatikus elektromos mező **konzervatív (= örvénymentes)**:

$$\oint_G \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = 0$$

Ennek alapján bármely sztatikus elektromos mezőhöz definiálhatunk potenciálkülönbséget:

$$W = q \int_G \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = q \underbrace{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}}_{-\Delta U} = -q \Delta U \Rightarrow \Delta U = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Ha a kezdőpontot rögzítjük, és ott a potenciált 0V-nak választjuk, akkor potenciált is értelmezhetünk bármely sztatikus elektromos mezőhöz:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}' \Leftrightarrow \text{grad} U(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

Az örvénymentesség egyenértékű megfogalmazásai:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}' \Leftrightarrow \oint_G \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \int_F \text{rot} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{A} = 0 \Leftrightarrow \text{rot} \vec{E}(\vec{r}) = 0,$$

ahol \vec{r} a G_1 görbe pontjain fut végig, \vec{r}' pedig a G_2 görbe pontjain; F a G zárt görbe által felfesztett felület.

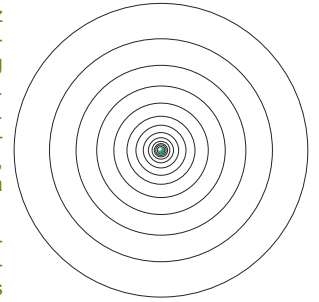
Ha az elektromos mező egy pontjától indulva úgy mozdulunk el, hogy a térerősség minden helyen merőleges legyen az ottani elmozdulásra, akkor olyan helyekre jutunk, ahol a potenciál a kiindulási hely potenciáljával egyenlő (ui. ha $\vec{E} \perp d\vec{r} \Rightarrow \vec{E} d\vec{r} = 0$). Így egy olyan felületet járhatunk be, amelynek minden pontjában azonos a potenciál (= **ekvipotenciális felület**). Ekvipotenciális felületet a konzervatív elektromos mező bármely pontjából indulva készíthetünk.

Megjegyzés

- Elterjedten szokás a potenciált az elektromos mező által kifejtett erő munkája helyett a „mező ellenében végzett munkával” definiálni. Azon túl, hogy a fizikában a valami „ellenében végzett munka” egyszerűen **nincs definiálva**, így az erre hivatkozó újabb definíció további kiegészítések nélkül legfeljebb „hangulati” elemekre támaszkodhat, rendkívül célszerűtlen is, mert a potenciál fogalmába olyan mozzanatokat is belevisz, amelyeknek a mezőt jellemző potenciálfogalomnak semmi köze. Értelmezhetetlen helyzetet teremt pl. abban az egészen hétköznapi esetben, amikor a töltött test az elektromos mező által kifejtett erő egyedüli hatása alatt mozdul az egyik pontból a másikba: ekkor ugyanis nincs is olyan test vagy személy(?), ami vagy aki „a mező ellenében” a hibás definícióban felvázolt küzdelmet lefolytathatná. Itt is – mint sok más helyen – azzal a törekvéssel találkozunk, amely egy összefüggésben megjelenő mínuszjelet valamilyen hatást, törekvést lerontó jelenség matematikai megjelenítéseként próbálja értelmezni, vagyis azzal, amely összekeveri a „negatív” szó egyik köznyelvi jelentését a mínuszjel egzakt matematikai jelentésével.
- Az ekvipotenciális felületek megrajzolásával az erővonalak megrajzolásával hasonlóan képszerűvé tehetjük az elektromos mező szerkezetét. Például a ponttöltés elektromos mezőjének ekvipotenciális felületei – mint az könnyen belátható – a ponttöltést koncentrikusan körülvevő gömbök.

– Ahogyan az erővonalak megrajzolásával képszerűvé tett elektromos mezőt szokás megpróbálni kvantitatívvá tenni (az erővonal-sűrűség bevezetésével), szokás bevezetni az ekvipotenciális felületek vonalmenti sűrűségét a következő definícióval: „az ekvipotenciális felületek minden pontban a térerősségre merőlegesek, és olyan sűrűséggel rajzoljuk meg őket, hogy egységnyi hosszúságú, a felületre merőleges szakaszt annyi messe át, amennyi ott a térerősség nagysága”. Sajnos ez a definíció sem sikeresebb, mint az erővonal-sűrűséggel dolgozó, lényegében ugyanazokkal a hibákkal küzd. A szakirodalomban az elektromos mező vonalmenti ekvipotenciálisfelület-sűrűséggel történő kvantitatív jellemzésére lényegesen kevesebb próbálkozás található, mint az erővonal-sűrűséggel kapcsolatosan. Ennek valószínűleg az az oka, hogy nem sikerült olyan kísérleti elrendezést találni, amelyben valamilyen fizikai objektum szinte automatikusan rajzolna ki valamiféle, az ekvipotenciális felületekhez hasonlatos alakzatokat.

Összességében megállapíthatjuk, hogy az elektrosztatikus mező szerkezetének képszerűvé tételére mind az erővonalkép, mind az ekvipotenciális felület-sereg alkalmas, a mező mennyiségi jellemzésére azonban egy-egy pontban (ill. annak környezetében) sokkal *alkalmasabbnak* mutatkozik a fogalmilag *mérési eredményekre támaszkodó* térerősség és potenciál, mint a képszerű megjelenítésből származtatott mennyiségek. Ebből értelemszerűen következik, hogy a mezővel kapcsolatosan minden állítás teljes értékűen fogalmazható meg az erővonal-fogalom, és az ekvipotenciálisfelület-fogalom nélkül is. Különösen igaz ez a mennyiségi állításokra (törvényekre) vonatkozóan, sőt, az erővonal-sűrűség és az ekvipotenciálisfelület-sűrűség szükségképpen problematikus jellege miatt mondhatjuk, hogy a mennyiségi állítások csak a térerősséggel és a potenciállal fogalmazhatók meg korrekt módon – az erővonal-sűrűséggel és az ekvipotenciálisfelület-sűrűséggel azonban *nem*. A továbbiakban tehát ennek megfelelően járunk el: ha az erővonalakat valamely képen sűrűbbre vagy ritkábbra rajzoljuk, azt csak azért tesszük, hogy a képszerűséget ezzel is fokozzuk (még több információt sűrűsítsünk a képbe), de sosem próbálunk meg egy-egy ilyen képre hivatkozva mennyiségi állításokat megfogalmazni. Ugyan így járunk el az ekvipotenciális felületek vonalmenti sűrűségével kapcsolatban is.



Kapacitás

Feladat

Határozzuk meg egy R sugarú, Q töltésű fémgömb potenciálját!

Megoldás

Szimmetria okok és a Gauss-törvény miatt a gömbtől származó térerősség a gömbfelületen kívül mindenütt pontosan olyan, mintha az egy a középpontjában elhelyezett ponttöltéstől származna, s így a potenciál is ilyen, vagyis ha $r > R$, akkor $U(r) = k \frac{Q}{r}$. Speciálisan a gömb felszínén:

$$U = k \frac{Q}{R} = \frac{k}{R} Q,$$

vagyis a Q töltés által keltett potenciál (potenciálkülönbség) arányos magával a töltéssel. Az arányossági tényező csak magától a vezető rendszer (itt a gömb) geometriai adataitól függ. Ennek reciproka külön nevet is kapott: **kapacitásnak** nevezzük, és általában C -vel jelöljük.

$$C = \frac{R}{k} \quad (\Leftarrow \text{a } \mathbf{gömbkondenzátor} \text{ kapacitása}).$$

A kapacitás SI egysége (a definíciójából következően): $[C] = \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2\text{m}} = \frac{\text{Nm}}{\text{C}^2} = \text{F}$ (farad).

Feladat

Határozzuk meg két nagy kiterjedésű, párhuzamos síklemez kapacitását, azon feltétel mellett, hogy ezek össztöltése mindig 0 (vagyis, ha az egyik töltése Q , akkor a másiké $-Q$)!

Megoldás:

Alkalmazzuk most is a Gauss-törvényt! Ekkor $\oint_F \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \frac{1}{\epsilon_0} Q \Rightarrow E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$. Ezzel $|\Delta U| = \left| \int_G E \, dl \right| = Ed = \frac{d}{\epsilon_0 A} |Q|$, vagyis $|\Delta U| \sim |Q|$ most is teljesül. A szokásos

jelölésbeni konvenciókkal $U \sim Q$, és

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (\Leftarrow \text{a } \mathbf{síkkondenzátor} \text{ kapacitása}).$$

Az elektromos töltés kvantált jellege: Millikan-kísérlet

Az elektrodinamika történeti fejlődése során a makroszkopikus tapasztalatokra támaszkodva a töltést folytonos mennyiségként definiálták. Az elektromos töltés kvantált jellegét perdöntő módon Millikan bizonyította be (1910-ben), oly módon, hogy megpróbált kisebb, majd még kisebb töltöttségű testeket előállítani, és ezek töltését megmérni. Ehhez olajcseppeket porlasztott kondenzátorlemezek közé, amelyek a porlasztás során ahhoz hasonlóan válnak töltötté, mint a szőrmével megdörzsölt ebonitrúd. A kondenzátorra feszültséget kapcsolva a lemezek közötti, jó közelítéssel homogénnek tekinthető elektromos mezőben viszonylag kényelmesen vizsgálható az olajcseppek mozgása, ami alapján a rá ható erőkre, s ezen keresztül végül is az olajcsepp töltésére következtethetünk. Az olajcseppekre

– a gravitációs mező által kifejtett erő: $\vec{g} \frac{V \rho}{m}$;

- a levegő által kifejtett erő $\begin{cases} \text{felhajtó erő } (-\bar{g}V\rho_{\text{lev.}}) \\ \text{közegellenállási erő } (-6\pi\eta_{\text{lev.}}\bar{v}) \end{cases}$;
- az elektromos mező által kifejtett erő: $q\bar{E}$

hat. A közegellenállási erő a sebesség nagyságától növekvően függ, és mert a sebességgel ellentétes irányú, az olajcseppek állandó sebességgel mozognak (sebességük addig növekszik, amíg a sebességgel együtt növekvő közegellenállási erő nulla eredő erőt nem eredményez). Maguk a kondenzátorlemezek között mozgó olajcseppek igen apró méretük miatt csak mikroszkóppal figyelhetők meg. Egy-egy cseppet a mikroszkóp látómezőjében kiválasztva, majd a kondenzátor lemezeire kapcsolt feszültséget változtatva, először is eldönthetjük, hogy a csepp töltött-e: ha pl. a feszültség polaritását megváltoztatva megváltozik a csepp mozgásiránya, akkor a csepp bizonyosan töltött.

A mikroszkópban a cseppek mérete nem olvasható le, mert olyan nagyításnál, amelynél ez már megtehető lenne, a cseppek 0,01 s–0,1 s alatt „száguldának” át a látómezőn, ráadásul mozgásuk kiértékelésében már zavaró a hőmozgásból származó rendezetlen jelleg. Ezért a mérést olyan nagyítás mellett célszerű elvégezni, amelynél a cseppek pontszerűnek látszanak, de elmozdulásuk a mikroszkópban elhelyezett skáláról jól leolvasható. Mivel az ismertett megfigyelési körülmények között olajcseppek töltése mellett a sugaruk sem ismert, a megfigyelt csepp mozgásának két egymástól független szakaszát kell kiértékelni, hogy a két ismeretlen meghatározásához szükséges két független egyenlethez jussunk – célszerűen pl. azt a szakaszt, amikor a csepp a rá ható erők hatása alatt lefelé mozog, és azt, amelyben felfelé mozog.

Mivel az olajcseppek állandó sebességgel mozognak, a dinamika alaptörvénye szerint:

$$\rho\bar{v}g + q\bar{E} - 6\pi\eta_{\text{lev.}}r\bar{v} - \rho_{\text{lev.}}V\bar{g} = 0 \Rightarrow (\rho - \rho_{\text{lev.}})V\bar{g} + q\bar{E} - 6\pi\eta_{\text{lev.}}r\bar{v} = 0 \Rightarrow (\rho - \rho_{\text{lev.}})\frac{4r^3\pi}{3}\bar{g} + q\bar{E} - 6\pi\eta_{\text{lev.}}r\bar{v} = 0.$$

Ha $\bar{v} \uparrow \bar{E} \uparrow \bar{g}$ (= az olajcsepp lefelé mozog), a dinamika alaptörvényét lefelé mutató tengelyre vonatkoztatott komponensekkel felírva:

$$(\rho - \rho_{\text{lev.}})\frac{4r^3\pi}{3}g + qE_{\text{le}} - 6\pi\eta_{\text{lev.}}rv_{\text{le}} = 0,$$

ahol E_{le} a csepp lefele haladása közben fennálló elektromos térerősség nagysága, v_{le} pedig a lefelé haladás sebességé. (Csak érdekességképpen említjük meg, hogy a lefelé mozgó csepp a mikroszkópban felfelé mozogni látszik, mert a mikroszkóp fordított állású képet állít elő.)

Ha $\bar{v} \uparrow \bar{E} \downarrow \bar{g}$ (= az olajcsepp felfelé mozog), a dinamika alaptörvényét ugyancsak lefelé mutató tengelyre vonatkoztatott komponensekkel felírva:

$$(\rho - \rho_{\text{lev.}})\frac{4r^3\pi}{3}g - qE_{\text{fel}} + 6\pi\eta_{\text{lev.}}rv_{\text{fel}} = 0.$$

Mivel ρ , $\rho_{\text{lev.}}$, $\eta_{\text{lev.}}$, g ismert, v_{fel} , v_{le} és E_{fel} , E_{le} megmérhető $\left(E = \frac{U}{d}\right)$, így ebből a két egyenletből r és q meghatározható. r meghatározásához a második egyenletet az elsőből kivonjuk:

$$q(E_{\text{le}} + E_{\text{fel}}) - 6\pi\eta_{\text{lev.}}r(v_{\text{fel}} + v_{\text{le}}) = 0 \Rightarrow r = \frac{q(E_{\text{le}} + E_{\text{fel}})}{6\pi\eta_{\text{lev.}}(v_{\text{fel}} + v_{\text{le}})}.$$

r így kapott értékét a második egyenletbe behelyettesítve:

$$(\rho - \rho_{\text{lev.}})q^3 \frac{(E_{\text{le}} + E_{\text{fel}})^3}{16\pi^2\eta_{\text{lev.}}^3(v_{\text{fel}} + v_{\text{le}})^3} - \frac{q(E_{\text{le}} + E_{\text{fel}})}{6\pi\eta_{\text{lev.}}(v_{\text{fel}} + v_{\text{le}})}v_{\text{le}} = 0,$$

$$q^2 \frac{(E_{\text{le}} + E_{\text{fel}})^3 (\rho - \rho_{\text{lev.}})}{162\pi^2\eta_{\text{lev.}}^3(v_{\text{fel}} + v_{\text{le}})^3} g - E_{\text{le}} + \frac{E_{\text{le}} + E_{\text{fel}}}{v_{\text{fel}} + v_{\text{le}}}v_{\text{le}} = 0,$$

$$q = \sqrt{\frac{E_{\text{fel}} - \frac{E_{\text{le}} + E_{\text{fel}}}{v_{\text{fel}} + v_{\text{le}}}v_{\text{le}}}{(E_{\text{le}} + E_{\text{fel}})^3 (\rho - \rho_{\text{lev.}}) g}} = \sqrt{\frac{162\pi^2\eta_{\text{lev.}}^3 d^2 (v_{\text{fel}} + v_{\text{le}})^2 (v_{\text{le}}U_{\text{fel}} - v_{\text{fel}}U_{\text{le}})}{(U_{\text{le}} + U_{\text{fel}})^3 (\rho - \rho_{\text{lev.}}) g}}.$$

Sok olajcsepp mozgását így kiértékelve Millikan azt kapta, hogy a cseppek töltése igen sokszor pontosan (= mérési hibán belül) azonosnak adódik, amikor pedig ettől eltér, akkor mindig ennek a legkisebb (= elemi) értéknek az egész számú többszöröse. Ezzel indirekt úton bebizonyította az elektron létezését, hiszen ezt a tapasztalatot a legkézenfekvőbb módon úgy lehet értelmezni, ha feltételezzük egy részecske létezését, ami éppen e kísérletekben tapasztalt legkisebb töltésmennyiséget hordozza, ti. $1,6 \cdot 10^{-19}$ C-ot.

Megjegyzés

Miután Millikan kísérletéből – és a későbbiekben sok-sok más – kísérletből kiderült, hogy a makroszkopikus testek töltöttségi állapota minden más esetben is ennek a töltésnek az egészszámú többszöröse, célszerűnek látszik a töltöttségi állapot mértékének az elemi töltést hordozó részecskék számosságát választani. Éppen ezt tettük, amikor a töltést definiáltuk.

Az elektromos mező energiája, energiasűrűsége

A feltöltött kondenzátor belsejében az elektromos mezőt végezz, miközben egy töltött részecske az egyik lemezről a másikra jut. Közben a kondenzátor töltése megváltozik, és ezzel az elektromos mező térerőssége is. Ha az elektromos mező munkája pozitív, akkor a térerősség nagysága csökken. Ilyenkor azt mondjuk, **az elektromos mező energiája** csökkent, miközben a töltéseken munkát végeztek.

Feladat

Határozzuk meg, mennyi az elektromos mező munkája, miközben a kezdetben U_0 feszültségre feltöltött kondenzátort a fegyverzetek között mozgó töltések kisütik!

Megoldás

A kondenzátor töltése a kisütési folyamat minden pillanatában CU , a fegyverzetek közötti elektromos térerősség pedig $\frac{U}{d}$ nagyságú. Miközben a pozitív fegyverzet töltése dQ -val csökken, az átáramlott töltésre az elektromos mező $-\frac{U}{d}dQ$ nagyságú erőt fejt ki, amelynek munkája a két fegyverzet közötti elmozdulás közben $dW = -\frac{U}{d}dQd = -UdQ$ (ahol kihasználtuk, hogy az elektromos mező által kifejtett erő és az elmozdulás egyirányú, továbbá, hogy $dQ < 0$). A kisütési folyamat egészében végzett munka ezen elemi munkák összege:

$$W = \int_{U_0}^0 dW = -\int_{U_0}^0 UdQ = -\int_{\frac{Q_0}{C}}^0 \frac{U}{C} dQ = -\left[\frac{Q^2}{2C}\right]_{\frac{Q_0}{C}}^0 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} = \frac{1}{2} CU_0^2.$$

A kisütött kondenzátor már nem végez munkát a lemezei között mozgó töltéseken, ezért a kondenzátor energiájának nulla pontját kisütött állapothoz rendeljük, s így

$$E = \Delta E_{\text{kisütés}} = W = \frac{1}{2} CU_0^2.$$

Mivel a kondenzátor belsejében az elektromos mező homogén, az energia eloszlását is homogénnek tekinthetjük, s így az energiasűrűség:

$$\rho_E = \frac{\frac{1}{2} CU^2}{V} = \frac{\frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{U}{d} E^2 dA}{A d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2.$$

Az eredmény általános érvényű, vagyis az energiasűrűséget a térerősség szabja meg $\rho_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ szerint.

Kölcsönhatási energia

Két ponttöltés kölcsönhatási energiája az elektromos mező energiájának azon többlete, amely annak tulajdonítható, hogy a két ponttöltés végtelen távolról egymás közelébe kerül.

Feladat

Határozzuk meg, mennyivel változik az elektrosztatikus mező energiája, miközben egy ponttöltés elektrosztatikus mezőjében egy másik végtelen távolságból az első a távolságra közelíti meg!

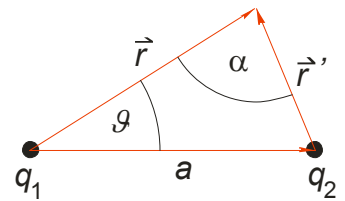
Megoldás

Egy ponttöltéshez tartozó energiasűrűség teljes térre vonatkozó integrálja divergens:

$$E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi k^2 \frac{q^2}{r^4} d\varphi d\vartheta dr = \pi^2 k^2 q^2 \epsilon_0 \int_0^\infty \frac{1}{r^4} dr = -\frac{1}{3} \pi^2 k^2 q^2 \epsilon_0 \left[\frac{1}{r^3}\right]_0^\infty \rightarrow \infty$$

(vagyis a ponttöltéshez tartozó teljes mezőenergia értelmetlen), így az egyes ponttöltésekhez tartozó mezőenergiákból kiindulva nem tudunk válaszolni a feladat kérdésére. Nem divergens azonban a feladat szerinti helyzetekhez tartozó energiasűrűségek megváltozásának teljes térre vonatkozó integrálja, ami értelemszerűen az energiasűrűségek teljes térre vonatkozó integráljainak különbségével lenne egyenlő, már tudniillik akkor, ha ez utóbbiak külön-külön is léteznének. Mivel azonban ezek külön-külön divergensnek, a következő lépésekben a két helyzethez tartozó energiasűrűségek különbségének a teljes térre vonatkozó integrálját határozzuk meg:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int_V \rho_{E1,2} dV - \int_V \rho_{E1} dV - \int_V \rho_{E2} dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \left((\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 - \vec{E}_1^2 - \vec{E}_2^2 \right) dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dV = \epsilon_0 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 r^2 \sin\vartheta d\varphi d\vartheta dr = \\ &= 2\pi \epsilon_0 \int_0^\infty \int_0^\pi \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 r^2 \sin\vartheta d\vartheta dr = \frac{1}{2k} \int_0^\infty \int_0^\pi k \frac{q_1}{r^2} k \frac{q_2}{r'^2} \cos\alpha r^2 \sin\vartheta d\vartheta dr = \frac{kq_1 q_2}{2} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{\cos\alpha}{r'^2} \sin\vartheta d\vartheta dr = \\ &= \frac{kq_1 q_2}{2} \int_0^\infty \int_0^\pi \underbrace{\left(\frac{r^2 - a^2}{2rr'^3} + \frac{1}{2rr'} \right)}_{\frac{\cos\alpha}{r'^2}} \underbrace{\sin\vartheta d\vartheta}_{-d\cos\vartheta} dr = -\frac{kq_1 q_2}{4} \int_0^\infty \int_0^\pi \left(\frac{r^2 - a^2}{rr'^3} + \frac{1}{rr'} \right) d\cos\vartheta dr. \end{aligned}$$



Itt először is elvégeztük φ szerinti integrálást (ami 2π -vel való szorzást eredményezett, hiszen az integrandus nem függ φ -től), majd a ϑ szerinti integrálásról $\cos\vartheta$ szerinti integrálásra tértünk át, végül kihasználtuk, hogy a koszinusz-tétel szerint:

$$a^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{r^2 - a^2}{2rr'} + \frac{r'}{r} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{r'^2} = \frac{r^2 - a^2}{2rr'^3} + \frac{1}{2rr'}$$

A továbblépéshez fejezzük ki most r' -t ugyancsak a koszinusz-tétel felhasználásával: $r' = (r^2 + a^2 - 2ra \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}}$. Ezek után a $\cos \vartheta$ szerinti integrálás már könnyen elvégezhető:

$$\begin{aligned} \int_1^{-1} \left(\frac{r^2 - a^2}{rr^3} + \frac{1}{rr'} \right) d \cos \vartheta &= \int_1^{-1} \frac{r^2 - a^2}{r \underbrace{(r^2 + a^2 - 2ra \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}}}_{r^2}} d \cos \vartheta + \int_1^{-1} \frac{1}{r \underbrace{(r^2 + a^2 - 2ra \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}}}_{r^2}} d \cos \vartheta = \\ &= \frac{r^2 - a^2}{r} \cancel{\int} \frac{1}{\cancel{ra}} \left[\frac{1}{(r^2 + a^2 - 2ra \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}}} \right]_1^{-1} - \frac{1}{r} \cancel{\int} \frac{1}{\cancel{ra}} \left[(r^2 + a^2 - 2ra \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}} \right]_1^{-1} = \\ &= \frac{r^2 - a^2}{r^2 a} \left(\frac{1}{(r^2 + a^2 + 2ra)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(r^2 + a^2 - 2ra)^{\frac{1}{2}}} \right) - \frac{1}{r^2 a} \left((r^2 + a^2 + 2ra)^{\frac{1}{2}} - (r^2 + a^2 - 2ra)^{\frac{1}{2}} \right) = \\ &= \frac{r^2 - a^2}{r^2 a} \left(\frac{1}{\sqrt{(r+a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(r-a)^2}} \right) - \frac{1}{r^2 a} \left(\sqrt{(r+a)^2} - \sqrt{(r-a)^2} \right) = \frac{r^2 - a^2}{r^2 a} \left(\frac{1}{|r+a|} - \frac{1}{|r-a|} \right) - \frac{1}{r^2 a} (|r+a| - |r-a|), \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\frac{d}{d \cos \vartheta} \frac{1}{(r^2 + a^2 - 2ra \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ra}{(r^2 + a^2 - 2ra \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}}}$, továbbá, hogy $\frac{d}{d \cos \vartheta} (r^2 + a^2 - 2ra \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}} = -\frac{ra}{(r^2 + a^2 - 2ra \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}}}$.

Az eredményül kapott $\frac{r^2 - a^2}{r^2 a} \left(\frac{1}{|r+a|} - \frac{1}{|r-a|} \right) - \frac{1}{r^2 a} (|r+a| - |r-a|)$ kifejezés további kiszámolását két részre bontjuk:

Ha $r < a$, akkor

$$\frac{r^2 - a^2}{r^2 a} \left(\frac{1}{|r+a|} - \frac{1}{|r-a|} \right) - \frac{1}{r^2 a} (|r+a| - |r-a|) = \frac{r^2 - a^2}{r^2 a} \left(\frac{1}{r+a} + \frac{1}{r-a} \right) - \frac{1}{r^2 a} (r+a + (r-a)) = \frac{\cancel{r^2 - a^2}}{r^2 a} \frac{r-a + (r+a)}{\cancel{r^2 - a^2}} - \frac{2r}{r^2 a} = \frac{2}{ra} - \frac{2}{ra} = 0.$$

Ha $r > a$, akkor

$$\frac{r^2 - a^2}{r^2 a} \left(\frac{1}{|r+a|} - \frac{1}{|r-a|} \right) - \frac{1}{r^2 a} (|r+a| - |r-a|) = \frac{r^2 - a^2}{r^2 a} \left(\frac{1}{r+a} - \frac{1}{r-a} \right) - \frac{1}{r^2 a} (r+a - (r-a)) = \frac{\cancel{r^2 - a^2}}{r^2 a} \frac{r-a - (r+a)}{\cancel{r^2 - a^2}} - \frac{2a}{r^2 a} = -\frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2} = -\frac{4}{r^2}.$$

Most az r szerinti integrálást elvégezve (a két részre bontott integrálási tartomány figyelembe vételével):

$$-\frac{kq_1 q_2}{4} \int_0^{-1} \left(\frac{r^2 - a^2}{rr^3} + \frac{r'}{r} \right) d \cos \vartheta dr = -\frac{kq_1 q_2}{4} \underbrace{\int_0^{-1} \left(\frac{r^2 - a^2}{rr^3} + \frac{r'}{r} \right) d \cos \vartheta dr}_0 - \frac{kq_1 q_2}{4} \underbrace{\int_1^{\infty} \left(\frac{r^2 - a^2}{rr^3} + \frac{r'}{r} \right) d \cos \vartheta dr}_{-\frac{4}{r^2}} = -\frac{kq_1 q_2}{4} \int_a^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = -kq_1 q_2 \left[\frac{1}{r} \right]_a^{\infty} = -kq_1 q_2 \left(0 - \frac{1}{a} \right) = k \frac{q_1 q_2}{a}.$$

Feladat

Határozzuk meg azt a munkát, amit az elektromos mező végez a q_2 töltésű testen, miközben az a végtelen távoli pontból indulva a távolságra közelíti meg a q_1 töltést!

Megoldás

$$W_{\infty \rightarrow a} = \int_{\infty}^a \vec{E}_{q_1} q_2 d\vec{r} = q_2 \int_{\infty}^a k \frac{q_1}{r^2} dr = q_2 \left[-k \frac{q_1}{r} \right]_{\infty}^a = -k \frac{q_1 q_2}{a}.$$

Látjuk, hogy ez a munka az energiasűrűségből számolt energiaváltozásnak éppen a -1 -szerese. Ez azt jelenti, hogy az energiasűrűsége nyert összefüggés valóban alkalmas általános esetben is a mező energiaváltozásainak meghatározására:

$$\rho_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Nulla össztöltésű töltésrendszerek

Feladat

Tekintsünk egy olyan töltésrendszert, amelynek az össztöltése 0! Határozzuk meg ezen töltésrendszertől származó potenciált olyan tetszőleges \vec{r} helyen, amelyre teljesül, hogy a töltésrendszer minden pontjától mért távolsága lényegesen nagyobb, mint a töltésrendszer bármely két elemének távolsága!

Megoldás

Fejezzük ki először a töltésrendszer j . elemétől a kérdéses pontba mutató helyvektor abszolútértékét (a j . töltés távolságát attól a ponttól, ahol a potenciált meg akarjuk határozni)! Kihasználva, hogy $r_j \gg a_j$,

$$U(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n k \frac{q_j}{r_j} = k \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{a}_j|} = k \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n q_j - k \sum_{j=1}^n \underbrace{q_j \text{grad} \frac{1}{r}}_{\frac{1}{k}(U(\vec{r}-\vec{a}_j) - U(\vec{r}))} = -k \text{grad} \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n \vec{a}_j q_j.$$

A $\sum_{j=1}^n \vec{a}_j q_j = \sum_{j=1}^n \vec{p}_j$ mennyiséget **elektromos dipólmomentumnak** nevezzük, magát a töltésselrendezést pedig **elektromos dipólnak**. A dipólmomentumot általában \vec{d} -vel jelöljük, SI egysége definíciójából következően: $[d] = \text{Cm}$.

Határozzuk meg első lépésként $\text{grad} \frac{1}{r}$ értékét! A közvetett függvény deriválási szabálya szerint: $\text{grad} \frac{1}{r} = \frac{d}{dr} \text{grad} r$, és $\text{grad} r$ értéke már könnyen meghatározható:

$$\text{ható: } \text{grad}_x r = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{x}{r}. \text{ Ugyanígy } \text{grad}_y r = \frac{y}{r} \text{ és } \text{grad}_z r = \frac{z}{r}, \text{ vagyis } \text{grad} r = \frac{\vec{r}}{r}. \text{ Ennek felhasználásával, } \text{grad} \frac{1}{r} = \frac{d}{dr} \text{grad} r = -\frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{1}{r^3} \vec{r}. \text{ Ezek után a keresett potenciál:}$$

$$U(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n k \frac{q_j}{r_j} = k \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{a}_j|} = -k \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \sum_{j=1}^n \vec{a}_j q_j = k \frac{\vec{r}}{r^3} \sum_{j=1}^n \vec{a}_j q_j,$$

vagyis a dipóltól származó potenciál az \vec{r} helyvektorú helyen:

$$U(\vec{r}) = k \frac{1}{r^3} \vec{r} \vec{d}$$

A potenciál ismeretében már könnyen meghatározhatjuk a térerősséget is:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad} U(\vec{r}) = -k \text{grad} \left(\frac{1}{r^3} \vec{r} \vec{d} \right) = -k \left(\vec{r} \vec{d} \text{grad} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \text{grad}(\vec{r} \vec{d}) \right).$$

Határozzuk meg először $\text{grad} \frac{1}{r^3}$ értékét: $\text{grad} \frac{1}{r^3} = \frac{d}{dr} \text{grad} r = -3 \frac{1}{r^4} \frac{\vec{r}}{r} = -3 \frac{\vec{r}}{r^5}$, majd $\text{grad}(\vec{r} \vec{d})$ értékét: $\text{grad}_x(\vec{r} \vec{d}) = \frac{\partial}{\partial x}(x d_x + y d_y + z d_z) = d_x$, és hasonlóan $\text{grad}_y(\vec{r} \vec{d}) = d_y$, $\text{grad}_z(\vec{r} \vec{d}) = d_z$, vagyis $\text{grad}(\vec{r} \vec{d}) = \vec{d}$. Ezekkel

$$\vec{E}(\vec{r}) = -k \left(\vec{r} \vec{d} \text{grad} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \text{grad}(\vec{r} \vec{d}) \right) = -k \left((\vec{r} \vec{d}) \left(-3 \frac{\vec{r}}{r^5} \right) + \frac{\vec{d}}{r^3} \right) = k \left(3 \frac{(\vec{r} \vec{d}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{d}}{r^3} \right).$$

Látjuk, hogy a dipólmomentummal rendelkező töltésrendszertől származó térerősség a távolság harmadik hatványával csökken, (szemben a töltéstől származó térerősség második hatvány szerinti csökkenésével).

Speciális helyzetek

I. Gauss-féle főhelyzet ($\vec{r} \parallel \vec{d}$):

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \left(3 \frac{\vec{r} \vec{d}}{r^5} - \frac{\vec{d}}{r^3} \right) = 2k \frac{\vec{d}}{r^3}.$$

II. Gauss-féle főhelyzet ($\vec{r} \perp \vec{d}$):

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \left(3 \frac{\vec{d}}{r^5} - \frac{\vec{d}}{r^3} \right) = -k \frac{\vec{d}}{r^3}.$$

A legegyszerűbb dipólmomentummal rendelkező töltésrendszer két ponttöltés, amelyek egymástól ℓ távolságra helyezkednek el. Ennek dipólmomentuma:

$$\vec{d} = \sum_{j=1}^2 q_j \vec{a}_j = q \vec{a}_q - q \vec{a}_{-q} = q(\vec{a}_q - \vec{a}_{-q}) = q \vec{\ell},$$

ahol $\vec{\ell}$ nagysága $|\vec{a}_q - \vec{a}_{-q}| = \ell$.

A dipólra ható erő

Tekintsük a lehető legegyszerűbb, dipólmomentummal rendelkező töltésrendszert (két egymástól ℓ távolságra elhelyezett q és $-q$ pontszerű töltés)! Az elektromos mező által a töltésrendszerre kifejtett erő ekkor $\vec{F} = \vec{E}(\vec{r}_q)q - \vec{E}(\vec{r}_{-q})q = (\vec{E}(\vec{r}_q) - \vec{E}(\vec{r}_{-q}))q$. Határozzuk meg \vec{F} -et komponensenként:

$$F_x = \underbrace{(E_x(\vec{r}_q) - E_x(\vec{r}_{-q}))}_{(\text{grad } E_x)(\vec{r}_q - \vec{r}_{-q})} q = (\text{grad } E_x(\vec{r})) \vec{\ell} q = \vec{d} \text{ grad } E_x(\vec{r}), \text{ és hasonlóan } F_y = \vec{d} \text{ grad } E_y(\vec{r}), F_z = \vec{d} \text{ grad } E_z(\vec{r}).$$

Összefoglalva

$$\vec{F} = (\vec{d} \text{ grad}) \vec{E} = \begin{pmatrix} \vec{d} \text{ grad } E_x(\vec{r}) \\ \vec{d} \text{ grad } E_y(\vec{r}) \\ \vec{d} \text{ grad } E_z(\vec{r}) \end{pmatrix}.$$

Látjuk, hogy a dipólra csak inhomogén mezőben hat erő! Felhasználva, hogy az elektrosztatikus mező örvénymentes, a dipólra ható erő máképpen is meghatározható:

$$\begin{aligned} \text{grad}_x(\vec{d}\vec{E}) &= \frac{\partial(d_x E_x + d_y E_y + d_z E_z)}{\partial x} = d_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + d_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + d_z \frac{\partial E_z}{\partial x} = d_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + d_y \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial x} - d_y \frac{\partial E_x}{\partial y}}_0 + d_z \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial x} - d_z \frac{\partial E_x}{\partial z}}_0 \\ &= d_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + d_y \underbrace{\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)}_{\text{rot}_z E=0} + d_z \underbrace{\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)}_{\text{rot}_y E=0} + d_z \frac{\partial E_x}{\partial z} = \vec{d} \text{ grad } E_x. \end{aligned}$$

Hasonlóan: $\text{grad}_y(\vec{d}\vec{E}) = \vec{d} \text{ grad } E_y$ és $\text{grad}_z(\vec{d}\vec{E}) = \vec{d} \text{ grad } E_z$.

Összefoglalva, a dipólra ható eredő erő:

$$\vec{F} = (\vec{d} \text{ grad}) \vec{E}(\vec{r}) = \text{grad}(\vec{d}\vec{E}(\vec{r}))$$

A dipólra ható forgatónyomaték

Tekintsük ismét a lehető legegyszerűbb, dipólmomentummal rendelkező töltésrendszert:

$$\vec{M} = \vec{r}_q \times \vec{E}(\vec{r}_q)q - \vec{r}_{-q} \times \vec{E}(\vec{r}_{-q})q = (\vec{r}_q \times \vec{E}(\vec{r}_q) - \vec{r}_{-q} \times \vec{E}(\vec{r}_{-q}))q = \left(\left(\vec{r}_0 + \frac{\vec{\ell}}{2} \right) \times \vec{E}(\vec{r}_q) - \left(\vec{r}_0 - \frac{\vec{\ell}}{2} \right) \times \vec{E}(\vec{r}_{-q}) \right) q = \left(\vec{r}_0 \times (\vec{E}(\vec{r}_q) - \vec{E}(\vec{r}_{-q})) + \frac{\vec{\ell}}{2} \times (\vec{E}(\vec{r}_q) + \vec{E}(\vec{r}_{-q})) \right) q.$$

Ha a térerősség a dipól tartományában homogénnek tekinthető, akkor $\vec{E}(\vec{r}_q) = \vec{E}(\vec{r}_{-q}) = \vec{E}(\vec{r})$, s így

$$\vec{M} = \left(\vec{r}_0 \times \underbrace{(\vec{E}(\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r}))}_0 + \frac{\vec{\ell}}{2} \times \underbrace{(\vec{E}(\vec{r}) + \vec{E}(\vec{r}))}_{2\vec{E}(\vec{r})} \right) q = \vec{\ell} q \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{d} \times \vec{E}(\vec{r}),$$

vagyis a dipólra ható forgatónyomaték:

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{E}(\vec{r})$$

A dipól helyzetéből fakadó potenciális energia

Ha a dipólra forgatónyomaték hat, miközben elfordul, az elektromos mező munkát végez rajta. Feltételezve, hogy $\vec{d}\vec{\varphi} \uparrow \downarrow \vec{M}$,

$$dW = \vec{M} \vec{d}\vec{\varphi} = (\vec{d} \times \vec{E}(\vec{r})) \vec{d}\vec{\varphi} = -d E(\vec{r}) \sin \varphi d\varphi,$$

s így

$$W_{\varphi_0 \rightarrow \varphi} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} dW = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} d E(\vec{r}) \sin \varphi d\varphi = d E(\vec{r}) [\cos \varphi]_{\varphi_0}^{\varphi} = d E(\vec{r}) (\cos \varphi - \cos \varphi_0),$$

$$\Delta E_{p, \varphi_0 \rightarrow \varphi} = -W = -d E(\vec{r}) (\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

Ha a potenciális energia értékét a $\varphi = \frac{\pi}{2}$ helyen 0-nak választjuk, akkor

$$E_p(\varphi) = \Delta E_{p, \frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi} = -d E(\vec{r}) \left(\cos \varphi - \cos \frac{\pi}{2} \right) = -d \vec{E}(\vec{r}).$$

A dipól helyzetéből fakadó potenciális energiája tehát:

$$E_p(\varphi) = -d \vec{E}(\vec{r})$$

Látjuk, hogy amikor a dipól a térerősséggel egyirányban áll, $E_p(0) = -dE$, amikor ellentétes irányban áll, $E_p(\pi) = dE$. Mind a $d\vec{\varphi} \uparrow \uparrow \vec{E}$ helyzet, mind a $d\vec{\varphi} \uparrow \downarrow \vec{E}$ egyensúlyi, mert $\vec{M} = d \times \vec{E}$ miatt, $\vec{M} = 0$ mindkét helyzetben, de $E_p(\pi) = dE > -dE = E_p(0)$ miatt csak a $d\vec{\varphi} \uparrow \uparrow \vec{E}$ helyzet jelent stabilis egyensúlyt (ez a minimális potenciális energiájú helyzetet). Látjuk azt is, hogy a maximális helyzetből a nullahelyzetbe való fordulás közben az elektromos mező $2dE$ munkát végez.

Poisson-egyenlet

Az elektromos mező forrástörvénye: $\oint_F \vec{E}(\vec{r}) d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV \Leftrightarrow \text{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$. Ebbe a potenciál definícióját beírva $\text{div} \text{grad} U(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$. Felhasználva, hogy

$$\text{grad} U(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{div} \text{grad} U(\vec{r}) \equiv \frac{\partial^2 U(\vec{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(\vec{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(\vec{r})}{\partial z^2} \equiv \Delta U(\vec{r}).$$

A Δ -szal jelölt differenciáloperátort **Laplace-operátornak** hívjuk. Ezzel a forrástörvény differenciális alakja a következő alakba írható:

$$\Delta U(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

Ez az ún. **Poisson-egyenlet**, ami egy másodrendű differenciálegyenlet, amelynek megoldása a potenciál helyfüggését szolgáltatja.

Feladat

Határozzuk meg a d vastagságú, végtelen kiterjedésű, ρ töltéssűrűségű síklemeztől származó potenciált és térerősséget a hely függvényében!

Megoldás

Vegyük fel az $x-y$ koordinátasíkot a lemez síkjában! Ekkor az $x-y$ sík önmagával párhuzamos eltolásával szembeni invarianciája miatt $\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} = 0$ és

$\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y} = 0$. Így a Poisson-egyenlet a lemezen belül a következő alakot ölti: $\frac{\partial^2 U(\vec{r})}{\partial z^2} = -\frac{\rho(z)}{\epsilon_0}$. Ebből $\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} z + U'_0$. A szimmetria miatt a térerősség is szim-

metrikus: $\left. \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} \right|_{z=0} = -\left. \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} \right|_{z=d}$. Ekkor $U'_0 = \frac{\rho}{\epsilon_0} d - U'_0 \Rightarrow U'_0 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} d$.

A ρd mennyiség felületi töltéssűrűségként is szemlélhető, hiszen bármely dA felületdarabra $dQ = \rho dV = \rho \underbrace{d}_{dV} dA = \underbrace{\rho d}_{\eta} dA = \eta dA$. Ezzel a lemezen belül a térerősség:

$$\vec{E}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial U(z)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} z - \frac{\eta}{2\epsilon_0} \end{pmatrix}.$$

Speciálisan $\vec{E}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\eta}{2\epsilon_0} \end{pmatrix}$, és $\vec{E}(d) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\rho d}{\epsilon_0} - \frac{\eta}{2\epsilon_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\eta}{2\epsilon_0} \end{pmatrix}$.

A potenciál a lemezen belül:

$$U(z) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} z^2 + \frac{\eta}{2\epsilon_0} z + U_0.$$

Az $U(0) = 0$ választással: $U(z) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} z^2 + \frac{\eta}{2\epsilon_0} z$. Speciálisan $U(d) = -\frac{\rho d}{2\epsilon_0} d + \frac{\eta}{2\epsilon_0} d = 0$.

A lemezen kívül a Poisson-egyenlet: $\frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U(z)}{\partial z} = U_0^*$. Kihasnálva, hogy $\vec{E}(+0) = \vec{E}(-0)$,

$-\frac{\eta}{2\epsilon_0} = -U_0^*$, vagyis a térerősség e lemezen kívül, a $z < 0$ esetben:

$$\vec{E}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\eta}{2\epsilon_0} \end{pmatrix}, \text{ és hasonlóan a } z > 0 \text{ esetben: } \vec{E}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\eta}{2\epsilon_0} \end{pmatrix}.$$

A potenciál a lemezen kívül:

$$U(z) = U_0^* z + U_0 = \frac{\eta}{2\epsilon_0} z + U_0.$$

Mivel $U(d) = 0$, $\frac{\eta}{2\epsilon_0} d + U_0 = 0 \Rightarrow U_0 = -\frac{\eta}{2\epsilon_0} d$, s így

$$U(z) = \frac{\eta}{2\epsilon_0} (z - d),$$

vagyis a potenciál a lemez felületétől mért távolsággal arányosan nő.

Feladat

Határozzuk meg a ρ töltéssűrűségű, egyenletesen töltött, R sugarú gömbtől származó potenciált és térerősséget!

Megoldás

A gömbszimmetria miatt $U(\vec{r}) = U(r)$, így $\text{grad} U(\vec{r}) = \text{grad} U(r) = \frac{dU(r)}{dr} \text{grad} r = \frac{dU(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r}$. A Poisson-egyenlet szerint: $\text{div grad} U(r) = \text{div} \frac{dU(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$. Integráljuk ezt egy r_0 sugarú gömb térfogatára!

Ha $r_0 \leq R$,

$$\int_V \text{div} \frac{dU(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r} dV = -\int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV. \text{ A Gauss-tétel felhasználásával:}$$

$$\oint_F \frac{dU(r_0)}{dr} \frac{\vec{r}_0}{r_0} dA = -\int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV, \Rightarrow \frac{dU(r_0)}{dr} \frac{4\pi r_0^2}{\epsilon_0} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4\pi r_0^3}{3} \Rightarrow \frac{dU(r_0)}{dr} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r_0, \vec{E}(\vec{r}_0) = -\text{grad} U(\vec{r}_0) = -\frac{dU(r_0)}{dr} \frac{\vec{r}_0}{r_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r}_0}{r_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r}_0}{r_0}.$$

Innen

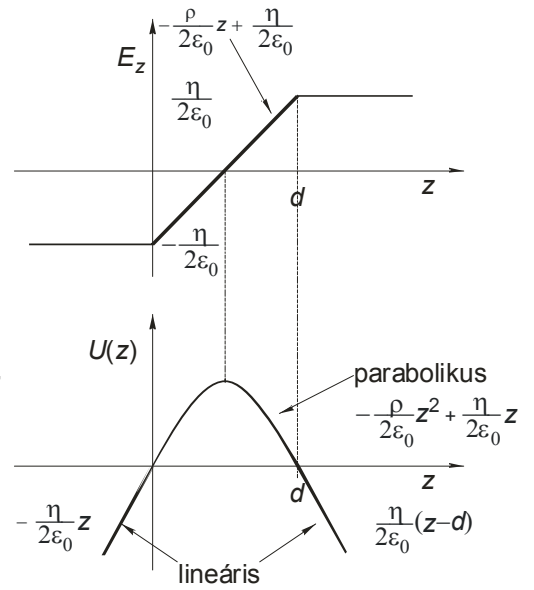
$$E(r_0) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_0.$$

Speciálisan a gömb felszínén: $E(R) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R$, és a $\rho > 0$ esetben minden helyen kifelé mutat (ellenkező esetben befelé).

Ezek után a potenciál értékét az $r = 0$ helyen U_0 -lal jelölve:

$$U(\vec{r}_0) = U(r_0) = -\int_0^{r_0} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} + U_0 = -\int_0^{r_0} \frac{\rho}{3\epsilon_0} r d\vec{r} + U_0 = -\int_0^{r_0} \frac{\rho}{3\epsilon_0} r dr + U_0 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{r_0} + U_0 = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r_0^2 + U_0.$$

Speciálisan a gömb felszínén: $U(R) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} R^2 + U_0 = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} R^2 \frac{4R\pi}{4R\pi} + U_0 = -\frac{\rho V_{gömb}}{2\epsilon_0 4R\pi} + U_0 = -\frac{k Q}{2 R} + U_0.$



Ha $r_0 > R$,

$$\int_V \operatorname{div} \frac{dU(r) \vec{r}}{dr r} dV = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4R^3 \pi}{3}. \text{ A Gauss-tétel felhasználásával:}$$

$$\oint_F \frac{dU(r) \vec{r}}{dr} \underbrace{\frac{\vec{r}}{r}}_{\frac{1}{\chi} dA} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4R^3 \pi}{3}, \quad \frac{dU(r)}{dr} \underbrace{4r^2 \chi}_{\chi} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4R^3 \pi}{3}. \text{ Innen } \frac{dU(r_0)}{dr} = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r_0^2},$$

$$\vec{E}(r_0) = -\operatorname{grad} U(r_0) = \frac{dU(r_0)}{dr} \frac{\vec{r}_0}{r_0} = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r_0^2} \frac{\vec{r}_0}{r_0} = \underbrace{\frac{4R^3 \pi}{3}}_{V_{\text{gömb}}} \rho \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}}_k \frac{\vec{r}_0}{r_0} = k \frac{Q}{r_0^3} \vec{r}_0,$$

vagyis a térerősség a gömbön kívül pontosan olyan, mintha azt egy a gömb középpontjában elhelyezkedő ponttöltés keltene!

$$U(r_0) = -\int_R^{r_0} k \frac{Q}{r^2} dr + U(R) = -kQ \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{r_0} + U(R) = -kQ \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0} \right) + U(R) = k \frac{Q}{r_0} + U(R) - k \frac{Q}{R} = k \frac{Q}{r_0} - \frac{kQ}{2R} + U_0 - k \frac{Q}{R} = k \frac{Q}{r_0} - \underbrace{\frac{3kQ}{2R}}_0 + U_0.$$

Ha U_0 -t (vagyis az $r=0$ helyen a potenciált $U_0 = \frac{3kQ}{2R}$ -nek választjuk, akkor

$$U(r_0) = k \frac{Q}{r_0},$$

vagyis pontosan olyan, mintha azt egy a gömb középpontjában elhelyezett ponttöltés keltette volna.

Feladat

Határozzuk meg a ρ töltéssűrűségű, egyenletesen töltött, R sugarú, végtelen hosszú hengertől származó potenciált és térerősséget!

Megoldás

A hengerszimmetria miatt $U(\vec{r}) = U(r)$ (ahol r a henger tengelyétől mért távolság), így

$$\operatorname{grad} U(\vec{r}) = \operatorname{grad} U(r) = \frac{dU(r)}{dr} \operatorname{grad} r = \frac{dU(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r}.$$

A Poisson-egyenlet szerint:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U(r) = \operatorname{div} \frac{dU(r) \vec{r}}{dr r} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Integráljuk ezt egy r_0 sugarú henger térfogatára!

Ha $r_0 \leq R$,

$$\int_V \operatorname{div} \frac{dU(r) \vec{r}}{dr r} dV = -\int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV. \text{ A Gauss-tétel felhasználásával: } \oint_F \frac{dU(r_0) \vec{r}_0}{dr} \underbrace{\frac{\vec{r}_0}{r_0}}_{\frac{1}{\chi} dA} = -\int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV, \text{ amiből } \frac{dU(r_0)}{dr} \underbrace{2r_0 \chi}_{\chi} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \underbrace{r_0^2 \chi}_{\chi} \Rightarrow \frac{dU(r_0)}{dr} = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} r_0, \text{ s így a}$$

térerősség

$$\vec{E}(r_0) = -\operatorname{grad} U(r_0) = -\frac{dU(r_0)}{dr} \frac{\vec{r}_0}{r_0} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{r_0}{r_0} \frac{\vec{r}_0}{r_0} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{r}_0.$$

Speciálisan a henger felszínén: $E(R) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} R$, és a $\rho > 0$ esetben minden helyen kifelé mutat (ellenkező esetben befelé). Ezek után a potenciál értékét az $r=0$ helyen U_0 -lal jelölve:

$$U(r_0) = U(r_0) = -\int_0^{r_0} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} + U_0 = -\int_0^{r_0} \frac{\rho}{2\epsilon_0} r d\vec{r} + U_0 = -\int_0^{r_0} \frac{\rho}{2\epsilon_0} r dr + U_0 = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{r_0} + U_0 = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r_0^2 + U_0.$$

Speciálisan a henger felszínén:

$$U(R) = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} R^2 + U_0 = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} R^2 \frac{\pi \ell}{\pi \ell} + U_0 = -\frac{\rho V_{\text{henger}}}{4\epsilon_0 \pi \ell} + U_0 = -k \frac{Q}{\ell} + U_0 = -k \lambda + U_0.$$

Ha $r_0 > R$,

$$\int_V \operatorname{div} \frac{dU(r) \vec{r}}{dr r} dV = -\frac{\rho R^2 \pi \ell}{\epsilon_0}. \text{ A Gauss-tétel felhasználásával: } \oint_F \frac{dU(r) \vec{r}}{dr} \underbrace{\frac{\vec{r}}{r}}_{\frac{1}{\chi} dA} = -\frac{\rho R^2 \pi \ell}{\epsilon_0}, \text{ amiből } \frac{dU(r)}{dr} \underbrace{2r \pi \ell}_{\chi} = -\frac{\rho R^2 \pi \ell}{\epsilon_0}. \text{ Innen } \frac{dU(r)}{dr} = -\frac{\rho R^2}{2r \epsilon_0}, \text{ amiből a tér}$$

erősség

$$\vec{E}(r_0) = -\text{grad}U(r_0) = -\frac{dU(r_0)}{dr} \frac{\vec{r}_0}{r_0} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r_0} \frac{\vec{r}_0}{r_0} = \underbrace{\frac{R^2 \pi \ell \rho}{2\pi \epsilon_0 \ell}}_{\substack{\text{V}_\text{henger} \\ Q}} \frac{1}{2k} \frac{1}{r_0^2} \vec{r}_0 = 2k \frac{Q}{\ell} \frac{\vec{r}_0}{r_0^2} = 2k \lambda \frac{\vec{r}_0}{r_0^2},$$

a térerősség nagysága pedig

$$E = \frac{2k\lambda}{r_0}.$$

Látjuk, hogy a térerősség a hengeren kívül olyan, mintha azt egy λ vonalmenti töltéssűrűség keltene! Ezek után a potenciál a hengeren kívül:

$$U(r_0) = -\int_R^{r_0} \frac{2k\lambda}{r} dr + U(R) = -2k\lambda \left[\frac{1}{r} \right]_R^{r_0} + U(R) = -2k\lambda \ln \frac{r_0}{R} + U(R) = -2k\lambda \ln \frac{r_0}{R} - \underbrace{k\lambda + U_0}_{U_0^*} = -2k\lambda \ln \frac{r_0}{R} + U_0^*.$$

Megosztás, polarizáció

Ha egy fémet elektromos mezőbe helyezünk, benne a töltések a térerősség hatására makroszkopikus méretekben elmozdulnak (= **megosztás**). Az új helyre mozdult elektromos töltések lokálisan megbontják a fém semlegességét. Az ily módon töltötté váló részek maguk is elektromos mezőt keltenek, amelynek térerőssége hozzáadódik a kezdetben jelenlevő mező térerősségéhez. Ez a töltésátrendezés mindaddig tart, amíg a térerősség a fém belsejében nullává nem válik (mert mindaddig nullától különböző erő hat a fémekben szabadon elmozduló elektronokra). Az elmondottakból az is következik, hogy a fémen kívül, de a felülete közvetlen közelében az elektrostatikus mező térerőssége a felületre merőleges.

Ugyanez a folyamat a külső elektromos mezőbe helyezett szigetelőkből csak mikroszkopikus elmozdulást (atomon vagy molekulán belülit) eredményez (= **polarizáció**). Ilyenkor atomi vagy molekula méretű dipólok jönnek létre, melyek momentumai az azonos beállítás miatt erősítik egymás hatását – **térfogati dipólmomentum-eloszlás**ról beszélünk: $\vec{d} = \vec{P} dV$, a szigetelődarab dipólmomentuma arányos a térfogatával. A \vec{P} -vel jelölt arányossági tényezőt **dipólmomentum-sűrűség**nek nevezzük. SI egysége: $[P] = \frac{Cm}{m^3} = \frac{C}{m^2}$. Mivel a polarizációt általában külső elektromos mező kelti (és tartja fenn), \vec{P} a helyi térerősség-

gel arányos: $\vec{P}(\vec{r}) = \kappa \vec{E}(\vec{r})$. A κ -val jelölt arányossági tényező értéke a szigetelő anyagi minőségére jellemző. SI egysége: $[\kappa] = \frac{\frac{C}{m^2}}{\frac{C}{Nm^2}} = \frac{C^2}{Nm^2}$.

Feladat

Határozzuk meg az elektromos mezőbe helyezett dielektrikum valamely térfogatától származó potenciált!

Megoldás

Láttuk, hogy nulla össztöltésű töltésrendszerrel származó potenciál az \vec{r} helyvektorú helyen

$$U(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n k \frac{q_j}{r_j} = k \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{a}_j|} = k \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n q_j - k \sum_{j=1}^n \underbrace{q_j \text{grad} \frac{1}{r}}_{\substack{0 \\ -\frac{1}{k}(U(\vec{r}-\vec{a}_j) - U(\vec{r}))}} \vec{a}_j = -k \text{grad} \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n \vec{a}_j q_j$$

szerint számolható. Az összegzést a töltésrendszer teljes térfogatára (itt a dielektrikum térfogatára) kell kiterjeszteni, ami folytonos esetre így írható:

$$U(\vec{r}) = -k \int_V \vec{P} \text{grad} \frac{1}{r} dV,$$

ahol \vec{P} a térfogati dipólmomentum-sűrűség. Kihasználva, hogy a szorzatfüggvény deriválási szabálya szerint

$$\text{div} \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) = \vec{P} \text{grad} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \text{div} \vec{P} \Rightarrow \vec{P} \text{grad} \frac{1}{r} = \text{div} \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) - \frac{1}{r} \text{div} \vec{P},$$

továbbá a felületi és térfogati integrálok kapcsolatát leíró Gauss-tétel figyelembevételével a potenciál

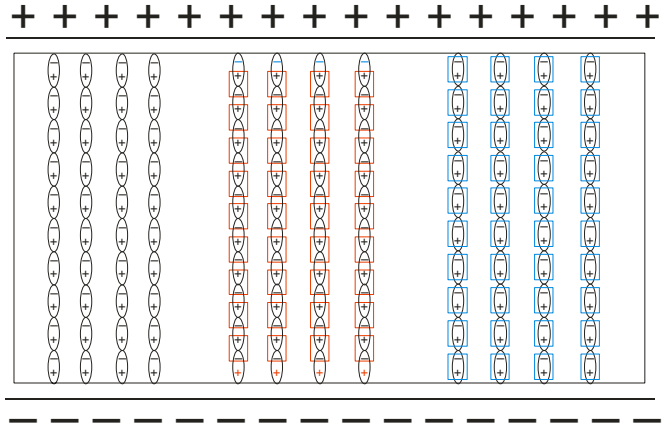
$$U(\vec{r}) = -k \int_V \vec{P} \text{grad} \frac{1}{r} dV = -k \int_V \text{div} \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) dV + k \int_V \frac{1}{r} \text{div} \vec{P} dV = -k \int_V \text{div} \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) dV + k \int_V \frac{1}{r} \text{div} \vec{P} dV = -k \oint_F \frac{\vec{P}}{r} \cdot d\vec{A} + k \int_V \frac{1}{r} \text{div} \vec{P} dV = -k \oint_F \frac{\rho_p}{r} dA + k \int_V \frac{\rho_p}{r} dV.$$

A polarizált dielektrikumtól származó potenciál (és vele együtt a belőle származtatható térerősség) visszavezethető egy felületi és egy térfogati töltéssűrűség-eloszlás által keltett potenciál (ill. térerősség) összegére, ahol a felületi töltéssűrűség a dielektrikum határfelületén értendő, $\eta_p = -P_n$, a térfogati töltéssűrűség pedig a dielektrikum belsejében, $\rho_p(\vec{r}) = \text{div} \vec{P}(\vec{r})$.

Megjegyzés

- Ha a polarizáció homogén, $\text{div} \vec{P}(\vec{r}) = 0$, s így $\rho_p(\vec{r}) = 0$, vagyis a polarizáció hatását elegendő a dielektrikum határfelülete értelmezett felületi polarizációs töltésekkel figyelembe venni.
- Szokás a homogén elektromos mezőben a dielektrikumok határfelületén értelmezhető felületi polarizációs töltéssűrűség megjelenését azzal magyarázni, hogy a dielektrikum belsejében dipólláncok alakulnak ki, amelyeken belül az egyes dipólok beállnak a külső elektromos térerősségnek megfelelően (valahogyan úgy, ahogyan azt a mellékelt ábrán a dielektrikum bal oldalán megrajzoltuk – ez egyébként igaz). A szomszédos dipólok pozitív és negatív töltései semlegesítik egymást (ezeket a töltéspárokat a dielektrikum középső részén pirossal bekereteztük), így csak a dielektrikum határfelületén maradnak

„kompenzálatlan” töltések, az ezek által megtestesített töltéssűrűség a felületi polarizációs töltéssűrűség. Ez a „magyarázat” azonban adós marad azzal, hogy vajon miért nem az egyes dipólokon belüli töltéspárokról állítjuk, hogy semlegesítik egymást, hiszen ezt ugyanolyan joggal megtehetnénk (akár az egy molekulán belül – a molekulát dipólussá tevő – töltéspárok, akár a szomszédos molekulák elmentéses előjelű töltéspárjai nagyjából azonos távolságra vannak, ti. a molekulaméret nagyságrendjébe eső távolságra). Az ennek megfelelő képet a dielektrikum jobb oldalán rajzoltuk meg, ahol kékkel azokat a töltéspárokat kereteztük be, amelyek egy molekulán belül jöttek létre. Ha azonban így gondolkozunk – amit az előbbi magyarázat fényében ugyanolyan joggal megtehetnénk –, akkor a felületen nem maradnak „kompenzálatlan” töltések, s így a felületi polarizációs töltéssűrűség fel sem lép!? Ebből is láthatjuk, hogy a felületi polarizációs töltéssűrűség *nem egy jelenség*, hanem egy számolási segédeszköz (ha úgy tetszik, modellkép), amelynek segítségével bizonyos esetekben (homogén elektromos mezőbe helyezett dielektrikumban) nagyon egyszerűen meghatározható a dielektrikum belsejében kialakuló térfigati dipólmomentum-eloszlás által keltett járulékos elektromos mező térerőssége.



Elektromos mező dielektrikumokban

Feladat

Határozzuk meg, milyen térerősséget hoz létre egy R sugarú, Q töltésű gömb, amely végtelen kiterjedésű, homogén, izotróp dielektrikumban helyezkedik el!

Megoldás

A Gauss-törvényt a töltött gömböt koncentrikusan körülvevő, r sugarú gömbre felírva:

$$4r^2\pi E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho_{np} dV + \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho_p dV + \frac{1}{\epsilon_0} \oint \eta_p dA = \frac{Q}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \oint \kappa E_n dA + \frac{1}{\epsilon_0} \int \text{div } \vec{P} dV = \frac{Q}{\epsilon_0} - 4r^2\pi \frac{\kappa}{\epsilon_0} E(r) + \frac{1}{\epsilon_0} \int \text{div } \vec{P} dV,$$

ahol kihasználtuk, hogy $\vec{P} = \kappa \vec{E}$, továbbá, hogy $E_n = E$, mert \vec{E} a gömbből kifelé mutat, és hogy az r sugarú gömb felszínén E állandó. Ha speciálisan $r = R$,

$$4R^2\pi E(R) = \frac{Q}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \int \text{div } \vec{P} dV - 4R^2\pi \frac{\kappa}{\epsilon_0} E(R), \text{ ahol } \frac{1}{\epsilon_0} \int \text{div } \vec{P} dV = 0, \text{ mert az } R \text{ sugarú gömbön belül } \vec{P} = 0, \text{ hiszen ott nincs dielektrikum. Innen}$$

$$4R^2\pi E(R) \left(1 + \frac{\kappa}{\epsilon_0} \right) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(R) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \underbrace{(1 + \chi_\epsilon)}_{\epsilon_r} R^2} = \frac{1}{\epsilon_r} k \frac{Q}{R^2}.$$

A $\chi = \frac{\kappa}{\epsilon_0}$ jellegtelen mennyiség (hiszen $[\kappa] = [\epsilon_0]$) a dielektrikum polarizálhatóságára jellemző, **elektromos szuszceptibilitásnak** nevezzük. Az

$\epsilon_r = 1 + \frac{\kappa}{\epsilon_0} = 1 + \chi$ jellegtelen mennyiség ugyancsak a dielektrikum polarizálhatóságára jellemző, **relatív dielektromos állandónak** nevezzük.

Látjuk, hogy a gömb felszínén a térerősség $\frac{1}{\epsilon_r}$ -szerese annak a térerősségnek, ami dielektrikum jelenléte nélkül lenne.

Feladat

Határozzuk meg a síkkondenzátor belsejét kitöltő dielektrikumban uralkodó térerősséget!

Megoldás

Az elrendezés szimmetriája miatt a térerősség a lemezek között homogén, s így a polarizáció is homogén: $\vec{P} = \kappa \vec{E}$. Elegendő tehát dielektrikumban található töltések hatását egy a dielektrikum határfelületére képzel töltéssűrűséggel (felületi polarizációs töltéssűrűség) figyelembe venni. A lemezek között a térerősség vákuumban $E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} = \frac{\eta}{\epsilon_0}$ nagyságú lenne. Alkalmazva a Gauss-törvényt a Q töltésű kondenzátorlemez körülzáró felületre:

$$EA = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + \eta_p A) = \frac{1}{\epsilon_0} (Q - p_n A) = \frac{1}{\epsilon_0} (Q - \kappa EA),$$

ahonnan

$$EA \left(1 + \frac{\kappa}{\frac{\varepsilon_0}{\chi}} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \Rightarrow E = \frac{1}{\frac{1+\chi}{\varepsilon_r} \varepsilon_0 A} = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \frac{Q}{A}$$

Általában is igaz, hogy a homogén, izotróp dielektrikum belsejében a térerősség $\frac{1}{\varepsilon_r}$ -szerese annak térerősségnek, amit ugyanazok a töltések ugyanazon a helyen vákuumban keltenének. Ezzel a megállapítással a Gauss-törvény legáltalánosabb alakja homogén, izotróp dielektrikumra:

$$\oint_F \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \int_V \rho dV \Leftrightarrow \oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho dV$$

ahol bevezettük a $\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$, ún. dielektromos eltolódási vektort. Látjuk, hogy dielektromos eltolódási vektor a közegen belül is csak arra jellemző, hogy milyen töltések keltik az elektromos mezőt (akár vákuumban, akár dielektrikumban) – képletesen szólva mondhatjuk, hogy az elektromos mező „gerjesztésére”. A dielektromos eltolódási vektor SI egysége a definíciójából kiolvashatóan: $[D] = [\varepsilon_0][E] = \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$.

Bizonyítható, hogy az elektromos mező energiasűrűsége dielektrikumokban:

$$\rho_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}$$

Áramok szilárd anyagokban (fémes vezetőkben)

Szilárd anyagokban az atomtörzsek helyhez kötöttek, nem úgy, mint a szilárd anyagok egy részében (a **vezetőkben**) a kémiai kötést biztosító elektronok egy része, amelyek viszonylag szabadon mozoghatnak az atomtörzsek között. Ezek az atomtörzsek között „bolyongva”, időnként valamelyik atommal ütközve energiát vesznek át a rezgő atomoktól, illetve energiát adnak le azoknak, az egyes ütközések konkrét lefolyásától függően. Hogy a szilárd anyagban a gáZRészecskékhez hasonlóan mozgó elektronok összessége (**elektron-gáz**) energiát vesz fel, vagy energiát ad le a kristályrács atomjainak, attól függ, hogy melyikben alacsonyabb az egy szabadsági fokra jutó átlagos energia (= a kristályrács vagy az elektrongáz hőmérséklete magasabb-e). Az egyes elektronok mozgását vizsgálva éppúgy beszélhetünk **átlagos ütközésmentes időtartamról**, és **átlagos szabad úthosszról**, mint ahogyan az a gáZRészecskékkel kapcsolatban szokás a kinetikus gázelmélet keretében.

Ha a szilárd anyagot külső elektromos mezőbe helyezzük, a szabadon mozgó elektronok rendezetlen mozgására egy sodródó mozgás szuperponálódik: a termikus mozgásban „nyüzsgő” elektronokat az elektromos térerősség ahhoz hasonlóan sodorja tova, mint egy nyári estén a vízparton összeállt szünnyelgőt a hirtelen feltámadt könnyű szellő. Az elektronok rendezetlen mozgására szuperponálódó sodródás az elektrongáz kölcsönhatását a kristályráccsal csak észrevehető mértékben befolyásolja, mert az elektromos mező által létrehozott sebességjárulék (az átlagos ütközésmentes időtartam viszonylagos rövidsége miatt) nagyságrendekkel kisebb, mint a hőmozgáshoz tartozó sebesség. Így a külső elektromos mezőben sodródó elektrongázban mind a szabad úthossz, mind az átlagos ütközésmentes időtartam ugyanannyinak tekinthető, mint az elektromos mező jelenléte nélkül.

A külső elektromos mező hatására bekövetkező sodródás – szemben a hőmozgással – **rendezett jellegű**: következtében minden elektron azonos gyorsulással mozog. Az elektromos töltéssel rendelkező részecskék ilyen rendezett mozgását **elektromos áramnak** (vagy röviden csak **áramnak**) hívjuk. Szilárd testekben az elektromos áramot az elektrongáz rendezett elmozdulása jelenti. Statisztikai átlagban mondhatjuk, hogy az egyes elektron sodródási sebessége a valamely atommal történt ütközését követően az elektromos mező hatására folyamatosan nő, majd ezt a sebességjárulékot az újabb ütközéskor elveszti (a vele kapcsolatos mozgási energia-többletet átadja a kristályrácsnak: a kristály az áramvezetés következtében melegszik!), majd az elektron szempontjából az egész folyamat kezdődik előlről. Erre a képre (vagyis az elektrongáz-modellre) támaszkodva először is megvizsgáljuk, hogy a külső elektromos mező hatására mennyi töltés áramlik át a vezető valamely felületén.

Áramerősség, áramsűrűség, ellenállás, Ohm törvénye

Az elektronra ható erő $q\vec{E}$, aminek következtében a dinamika alaptörvénye szerint $\frac{q}{m}\vec{E}$ gyorsulással mozog. Ha két ütközés között átlagosan τ idő telik el, az elektron sodródási sebessége a következő ütközésig $\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}\tau$ értékűre növekszik. Átlagos sodródási sebessége a két ütközés között $\langle \vec{v} \rangle = \frac{q}{2m}\vec{E}\tau$. dt idő alatt a vezető A keresztmetszetén azok az elektronok jutnak át, amelyek benne vannak az $A\langle \vec{v} \rangle dt$ térfogatú hasámban. Ezen elektronok száma: $nA\langle \vec{v} \rangle dt$, ahol n az elektronok térfogati sűrűsége. Az A keresztmetszeten dt idő alatt áthaladó elektronok által átszállított töltés: $nqA\langle \vec{v} \rangle dt$. Felhasználva az elektronok átlagos sebességére kapott összefüggést, az A keresztmetszeten áthaladó töltés:

$$dQ = nqA\langle \vec{v} \rangle dt = nqA \frac{q}{2m} E \tau dt = \frac{nq^2 \tau}{2m} E A dt.$$

Látható, hogy ez az eltelő idővel arányos. Az arányossági tényezőt **áramerősségnek** nevezzük, és általában I -vel jelöljük: $dQ = I dt$. Az áramerősség SI egysége: $[I] = \frac{\text{C}}{\text{s}} = \text{A}$, (amper).

A fémes vezetőben az áramerősség: $I = \frac{nq^2\tau}{2m} EA$, vagyis arányos a felülettel. Az arányossági tényezőt áramsűrűségnek nevezzük, és általában j -vel jelöljük. Általánosabban fogalmazva az **áramsűrűség** az a mennyiség, aminek valamely felületre vett fluxusa az adott felületre vonatkozó áramerősség: $I = \int_F \vec{j} \cdot d\vec{A}$. Az

áramsűrűség definíciójából fakadóan vektormennyiség, SI egysége: $[j] = \frac{A}{m^2}$. Eredményünk szerint fémes vezetőben az áramsűrűség:

$$\vec{j} = \frac{nq^2\tau}{2m} \vec{E},$$

vagyis minden helyen az ott fennálló térerősséggel arányos. Az arányossági tényező (τ -n és n -en keresztül) az anyagi minőségtől függ: $\sigma = \frac{q^2}{2m} n\tau$, neve **fajlagos vezetőképesség**. SI egysége: $[\sigma] = \frac{A}{[E]} = \frac{m^2}{N} = \frac{m^2}{Nm} = \frac{m^2}{V\mathcal{C}} = \frac{A}{Vm} = \frac{S}{m}$ (ahol $\frac{A}{V} = S$, siemens). A fajlagos vezetőképesség reciprokát (ami nyilván szintén az anyagi minőségre jellemző) **fajlagos ellenállás**nak nevezzük: $\rho = \frac{1}{\sigma}$. A fajlagos ellenállás SI egysége: $\frac{m}{S} = \Omega m$ (ohm·méter). A fémes vezetőbeli áramsűrűsége nyert összefüggést a fajlagos vezetőképességgel megfogalmazva:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Ez az összefüggés az ún. **differenciális Ohm-törvény**.

Integráljuk a differenciális Ohm-törvény szerinti összefüggést a vezető keresztmetszetére! Ha \vec{E} a keresztmetszet minden pontjában azonos, és merőleges a felületre, akkor $\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA$, így $\int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \sigma EA \Rightarrow I = \sigma EA$. Integráljuk most ezt az összefüggést a vezető hossza mentén! Ha σ és E a vezető hossza mentén

állandó, $\int_{\ell} Id\ell = \int_{\ell} \sigma EA d\ell \Rightarrow I \int_{\ell} d\ell = \sigma EA \int_{\ell} d\ell \Rightarrow I\ell = \sigma EA\ell$. A vezető két végpontja között a potenciálkülönbség abszolútértéke: $|U| = \left| -\int_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{r} \right|$. Felhasználva,

hogy \vec{E} mindenütt párhuzamos a vezető tengelyével, $\left| -\int_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{r} \right| = E\ell$, s így $I\ell = \sigma A|U| \Rightarrow I = \sigma \frac{A}{\ell} |U|$, vagyis a vezető két végpontja között folyó áramerősség arányos a két pont között fennálló potenciálkülönbség abszolútértékével. Az arányossági tényezőt **vezetés**nek hívjuk, értéke az anyagi minőségen túl a vezető hosszától és keresztmetszetétől is függ: $G = \sigma \frac{A}{\ell}$. A vezetés SI egysége $[G] = [\sigma] \frac{[A]}{[\ell]} = \frac{S}{m} \frac{m^2}{m} = S$ (siemens). A vezetés reciprokát a vezető **ellenállás**ának

nevezzük, SI egysége: $[R] = \frac{1}{[S]} = \Omega$ (ohm). Az ellenállás definíciójának felhasználásával, $I = \frac{1}{R} |U|$. Az ebben az összefüggésben szereplő potenciálkülönbséget és áramerősséget egyaránt szokás előjelezni: a potenciálkülönbséget akkor előjelezzük pozitívrá, ha a haladás irányában csökken, az áramot pedig akkor, ha a térerősség a haladás irányába mutat (ellenkező esetben negatívrá előjelezzük őket). Az összefüggést az előjelezett mennyiségekkel megfogalmazva:

$$I = \frac{1}{R} U$$

Ez az összefüggés az ún. **integrális Ohm-törvény** (vagy egyszerűen csak Ohm-törvény). Érvényessége (mint a hozzá vezető megmondolásból látható) vékony, hosszú, fémes vezetőre terjed ki.

Megjegyzés

- Az itt igen egyszerű formájában bemutatott elektrongáz-modell alapján a fajlagos vezetőképességre nyert összefüggésből $\left(\sigma = \frac{q^2}{2m} n\tau \right)$ kiolvasható, hogy a fajlagos vezetőképesség függ a hőmérséklettől: növekvő hőmérséklettel az elektronok (hőmozgáshoz tartozó) átlagos sebessége növekszik, miközben a rácsatomok távolsága csak kismértékben változik, így az átlagos ütközésmentes időtartam és vele együtt a fajlagos vezetőképesség csökken. Ez a azt is jelenti, hogy növekvő hőmérséklettel a fajlagos ellenállás növekszik. Bár a fajlagos ellenállás a hőmérsékletnek korántsem lineáris függvénye, a gyakorlatban előforduló viszonylag szűk hőmérséklettartományban (~ 250 K – 320 K) általában jó közelítéssel lineárisnak tekinthető: $\Delta\rho = \alpha\rho_0\Delta T$. Az α -val jelölt arányossági tényezőt **a fajlagos ellenállás hőmérsékleti tényezőjének** nevezzük, SI egysége a definíciójából kiolvashatóan $\frac{1}{K}$. A fémes vezetők hőmérsékleti tényezője az előbb elmondottak szerint pozitív. Léteznek azonban negatív hőmérsékleti tényezőjű anyagok is. Tipikusan ilyenek például a félvezetők, amelyekben az áramvezetésben résztvevő töltéshordozók koncentrációja növekvő hőmérséklettel növekszik, mégpedig olyan mértékben, ami az átlagos ütközésmentes időtartam csökkenését túlkompenzálja, $\Delta(n\tau) > 0$.
- Pozitív és negatív hőmérsékleti tényezőjű anyagok együttes felhasználásával olyan ötvözetek készíthetők, amelyeknek a hőmérsékleti tényezője (legálábbis egy bizonyos hőmérsékleti tartományban) jó közelítéssel nulla. Ilyen ötvözet például a **konstantán** és a **manganin**. Ezeket gyakran használják nagy teljesítményű (ezért erősen melegedő) ellenállások készítéséhez.

- Az áramsűrűség definíciójából látjuk, hogy az vektor jellegű, az áramerősség pedig (mint az áramsűrűség fluxusa) előjeles skalár, az előjele attól függően pozitív vagy negatív, hogy a felületnormális az áramsűrűséggel hegyes vagy tompaszöveget zár be. A hálózatok egyes ágai mentén egy-egy nyíllal megadva szokás bejelölni az ún. feltételezett áramirányt. Valójában ezzel nem az áramirányt, hanem az áramok számolásakor használt felületnormális irányát jelöljük be. Így aztán nem meglepő, hogy esetenként a számolás negatív áramerősséget eredményez. Nem jelent ez egyebet, mint hogy az áramsűrűség a bejelölt felületnormálissal ellentétes irányú (a differenciális Ohm-törvényből tudjuk, hogy nyilván azért, mert a térerősség is ellentétes irányú vele). Tényleges **áramirány**nak ezután annak a felületnormálisnak az irányát tekintjük, amely az áramsűrűséggel pozitív fluxust eredményez. Mivel pedig a ohmos tagokon az áramsűrűség a térerősséggel egyirányú, a térerősség irányában pedig a pozitív töltések mozognak, mondhatjuk röviden azt is, hogy áramiránynak a pozitív töltések mozgásirányát nevezzük.
- Mint a fentiekből kitűnik, az áramhoz rendelt „irány” valójában nem is irány, hanem csupán egy előjel, tehát az áramerősség semmi esetre sem vektor (az áramsűrűség viszont az).
- A mérnöki tankönyvek egy részében szokás kétféle áramirányról beszélni: a fizikai áramirányról (ez megegyezik azzal, amiről fentebb mi is beszéltünk), és az ún. technikai áramirányról (ami az előbbivel ellentétes). A technikai áramirány parazita fogalom (felesleges, csak zavart kelt), a továbbiakban mi nem használjuk.
- Terminológiailag esetenként zavaró, hogy a hálózatelméletben (és az elektronikában általában is) egyaránt ellenállásnak hívják magát az alkatrészt (amelyet abból a célból építenek be, hogy rajta az átfolyó árammal arányos feszültség essen), és az alkatrészt elektronikai szempontból jellemző tulajdonságát is. Így aztán az olyan jellegű megállapításokat is értelmesebbnek kell tekintenünk, miszerint „ennek az ellenállásnak nagy az ellenállása”. Az zavaró benne, hogy a mondatban kétszer előfordul „ellenállás” szó, mást jelent az első esetben, mint a másodikban. A szaknyelvben másutt is fel-felbukkan ez a jelenség (pl. építsünk be egy kapacitást, akasszunk a fonál végére egy tömeget, stb.), de míg másutt ez a hiba könnyen javítható (építsünk be egy kondenzátort, akasszunk a fonál végére egy testet), az ellenállással kapcsolatban mindig csak a szövegkörnyezet adhat eligazítást arra vonatkozóan, hogy benne a szó melyik jelentésben szerepel.

Az elektromos áram teljesítménye, Joule–Lenz-törvény

Tekintsük a vezető valamely dV térfogatát! Ebben dt idő alatt egy elektron $\frac{dt}{\tau}$ -szor ütközik a kristályráccsal, s az elektrongáz-modell szerint, statisztikai átlagban minden ilyen ütközés alkalmával elveszti azt a járulékos energiát, amelyet az elektromos mezőből vett fel a két ütközés között: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{q}{m}\bar{E}\tau\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{m}E^2\tau^2$. Így dt idő alatt egy elektron összesen $\frac{1}{2}\frac{q^2}{m}E^2\tau^2\frac{dt}{\tau}$ energiát ad át a kristályrácsnak, a dV térfogatban található $n dV$ darab elektron pedig $\frac{1}{2}\frac{q^2}{m}E^2\tau^2\frac{dt}{\tau}n dV$ -t. Mivel kristályrács ebből fakadó energianövekménye a kristály belső energiáját növeli, ez az energiaközlés hőfejlődést jelent:

$$d'Q = \frac{q^2}{2m}n\tau E^2 dV dt = \sigma E^2 dV dt,$$

ahol $d'Q$ a kristályrács dV térfogatában dt idő alatt felszabaduló hő. Látjuk, hogy a hőfejlődés arányos az eltelt idővel: $d'Q = \overbrace{\sigma E^2 dV}^p dt = P dt$. Az arányossági tényezőt **elektromos teljesítmény**nek nevezzük: $P = \sigma E^2 dV$. Kihasználva, hogy $dV = Ad\ell$, írhatjuk, hogy $P = \sigma E^2 Ad\ell = \frac{\sigma A}{d\ell}(Ed\ell)^2 = \frac{U^2}{R} = UI = I^2 R$. A teljesítmény SI egysége: $[P] = VA = W$ (watt). A $P = \frac{\sigma E^2}{p} dV$ összefüggésből kiolvashatjuk, hogy a teljesítmény arányos a térfogattal. Az arányossági tényezőt **teljesítménysűrűség**nek nevezzük, és általában p -vel jelöljük: $P = p dV$. A teljesítménysűrűség SI egysége: $[p] = \frac{W}{m^3}$. Ezzel

$$p = \sigma E^2$$

Ez az ún. **differenciális Joule–Lenz-törvény**. A

$$P = \frac{U^2}{R} = UI = I^2 R$$

összefüggést **integrális Joule–Lenz-törvény**nek nevezzük.

Áramkörü törvények

A kontinuitási egyenlet

Egy zárt felületen belül található töltésmennyiség a töltésmegmaradás miatt csak annyival változhat meg, amennyi a felületen átáramlik. A dA felületdarabon dt idő alatt $\underbrace{\int_{dV} \frac{d\bar{A}\bar{v}dt nq}{\rho}}_{dQ}$ töltés lép ki a zárt felületen keresztül. A bennmaradó töltés megváltozása és kilépő töltések összege nulla: $\underbrace{\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV}_{dQ} + \underbrace{\oint_F \rho d\bar{v} dA}_{-dQ} = 0$. A

felületi integrált átírva térfogatra:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV = 0 \Rightarrow \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = 0.$$

Mivel ez tetszőleges integrálási tartományra teljesül, az integrandusnak is nullának kell lennie:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Ezt az összefüggést **kontinuitási egyenlet**nek hívjuk.

A Kirchhoff-törvények

Mivel fémes vezetőben az elektronsűrűség állandó, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = q \frac{\partial n}{\partial t} = 0$, így

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \oint_F \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0.$$

Ha a töltésáramlás a zárt felület néhány darabjára korlátozódik, $\oint_F \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_{F_1} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \int_{F_2} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \dots + \int_{F_n} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0$, vagyis a hálózat bármely térfogatából kifolyó áramok összege nulla:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

Ezt az összefüggést **Kirchhoff I. törvényének** nevezzük. Mint látjuk, I_k előjele attól függ, hogy \vec{v} a felületből kifelé (ekkor pozitíva választjuk), vagy befelé mutat (ekkor negatíva választjuk). A zárt felület által a vezetékekből összeállított hálózatból kivágott részt **vágat**nak nevezzük. Ha a zárt felület úgy húzható össze egyetlen pontra, hogy a rajta átlépő áramok közben változatlanok maradnak, a vágatot **csomópont**nak nevezzük. A $\sum_{k=1}^n I_k = 0$ összefüggést szokás **vágat-** vagy **csomóponti törvény**nek is nevezni.

Elektrosztatikus mezőben zárt görbe mentén a télerősség integrálja nulla volt: $\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$. Ha ez nullától különböző lenne, egy töltést a zárt görbe mentén körbemozgatva energiát vehetne fel az elektromos mezőből, de mert egy körülvágás során minden más változatlan maradna, ez ellentmondana az energiamegmaradás törvényének. Ugyanez a helyzet akkor is, ha az elektromos mezőben mozgó töltések is vannak ugyan (vagyis, amikor a mező nem sztatikus), de a télerősség minden helyen állandó. Ekkor persze a differenciális Ohm-törvény szerint az áramok is minden helyen időtől függetlenül bizonyulnak. Az ilyen áramokat (amelyeknek erőssége az időtől független) **stacionárius áram**oknak nevezzük.

Stacionárius áramokkal átjárt vezetők rendszerben zárt görbe mentén is teljesül, hogy $\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$. Ha az integrandus csupán a zárt görbe néhány szakaszán különbözik számottevően nullától, célszerű az integrálást szakaszokra bontva végezni: $\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{G_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{G_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \dots + \int_{G_n} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$, vagyis a stacionárius áramokkal át-

járt hálózatokban bármely zárt görbe mentén a feszültségesések előjelezett összege nulla:

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0$$

Ezt az összefüggést **Kirchhoff II. törvényének** nevezzük. Mint látjuk, U_k előjele attól függ, hogy a körülvágás során \vec{E} -vel egyirányban haladunk (ekkor a feszültség előjelét pozitíva választjuk), vagy vele ellentétesen (ekkor negatíva választjuk). A vezetékekből összeállított hálózatból kiválasztott zárt görbét **hurk**nak nevezzük. Szokás ezért Kirchhoff II. törvényét **hurk**törvényként is emlegetni.

Megjegyzés

– Elterjedten szokás Kirchhoff I. törvényét abban a formában megfogalmazni, miszerint: „a főágban folyó áram egyenlő a mellékágakban folyó áramok összegével”. Bár ez a megfogalmazás helytálló abban az értelemben, hogy a $\sum_{k=1}^n I_k = 0$ összefüggésből bármelyik áramot kifejezhetjük $I_m = - \sum_{k=1, k \neq m}^n I_k$, s azt

nevezhetjük akár főágban folyó áramnak is, mégsem szerencsés, mert azt a hamis látszatot sugallja, hogy minden hálózatban van egy kitüntetett ág (ti. amit főágnak nevezünk), s a törvény alkalmazásakor ezt kell megkeresnünk, hiszen *erről* állít valamilyen törvényt. Márpedig ez nem így van: a hálózatok ágai a Kirchhoff-törvények alkalmazásának szempontjából egyenrangúak! Ha pedig így szemléljük a bírált megfogalmazást, s hozzátesszük (vagy csak hozzágondoljuk), hogy a vizsgált vágat által generált ágak közül azt nevezzük főágnak, amelyiket akarjuk, akkor ugyanilyen joggal fogalmazhatnánk úgy is, hogy „a legszebb ágban folyó áram egyenlő a csúnyább ágakban folyó áramok összegével”, hozzátéve még természetesen, hogy a legszebb ág az, amelyiket annak választjuk. Fizikai törvények (és persze a belőlük fakadó áramköri törvények) esetében ilyenfajta – könnyen félresiklő – megfogalmazásoknak helye nincs!

– Elterjedten szokás Kirchhoff II. törvényét abban a formában megfogalmazni, miszerint „zárt áramkörben az elektromotoros erők összege egyenlő az RI szorzatok összegével: $\sum_{k=1}^n U_{e,k} = \sum_{k=1}^m R_k I_k$ ”. Szemben az első törvénynél elemzett, nem igazán szerencsés megfogalmazással, ez már tényszerűen is hibás

– legalábbis abban az értelemben, hogy megengedhetetlen mértékben beszűkíti a törvény használhatóságát, és ezzel alkalmatlanná teszi az áramkörök tárgyalására. Leginkább azzal, hogy azt a látszatot kelti, mintha egy hurok mentén csak kétfajta feszültségeségről beszélhetnénk: elektromotoros jellegűről (ennek mibenlétét a kétpólusok kapcsán tárgyaljuk majd), és az ohmos ellenállásokon eső feszültségről. Ha ezt a megfogalmazást tekintenénk Kirchhoff II. törvényének, használatát ki kellene zárni minden olyan hálózat esetében, amely kondenzátort, áramgenerátort, diódát, tartalmaz, vagy akár csak egy kapcsolót (ha megengedjük, hogy az nyitott állapotban is lehet)! Márpedig ilyeneket tartalmazó hálózatok is vannak, amelyek működését ugyan csak a Kirchhoff-törvények alapján lehet (és kell) tárgyalni! Megjegyezzük még, hogy az ezen megfogalmazással kizárt hálózati elemek között most meg sem említettük azokat, amelyeket ebben a félévben nem tárgyalunk (pl. tranzisztor, tirisztor, műveleti erősítő, stb.).

Szokás próbálkozni az átgondolatlanságból fakadó törvénymegfogalmazás problémáinak olyan úton történő kiküszöbölésével, hogy minden feszültséget megkísérelnek elektromotoros jellegűnek (pl. a kondenzátoron és a tekercsen eső feszültséget egyaránt), ill. ohmikus feszültségnek értelmezni (pl. a kapcsolón vagy a diódán eső feszültséget is). Ez azonban részben nehezen követhetővé teszi a tárgyalást (mert egy-egy áramköri elem folyton változó – az áramtól vagy éppen a feszültségtől függő ellenállásáról kell beszélni), másrészt vannak olyan helyzetek, amelyekben ez a módszer sem vezet eredményre, mert pl. nehéz megmagyarázni, hogy a nulla áramot vezető, végtelen ellenállású kondenzátoron (vagy egy nyitott kapcsolón) miért esik most éppen 10 V feszültség, bár lévén a $0 \cdot \infty$ matematikai értelemben határozatlan kifejezés, akár írhatjuk is, hogy $0 \text{ A} \cdot \infty \Omega = 10 \text{ V}$. De ugyanilyen megfontolással természetesen írhatnánk azt is, hogy $0 \text{ A} \cdot \infty \Omega = 20 \text{ V}$, vagyis annak eldöntésére, hogy a II. törvényben mekkora feszültséget kell szerepeltetnünk, mégiscsak a kétpólust definiáló karakterisztika (l. majd a kétpólusoknál) látszik alkalmasnak inkább, így aztán sokkal hasznosabb, ha az iménti megfontolásokon való töprengés helyett abban a formában használjuk Kirchhoff II. törvényét, ahogyan azt fentebb megfogalmaztuk. És mellel az általunk adott megfogalmazás még egyszerűbb is...

Relativisztikus mechanika, Lorentz-transzformáció

A mechanika törvényei a klasszikus fizika szerint minden inerciarendszerben egyenértékűen teljesülnek (nincs kitüntetett vonatkoztatási rendszer). Most rövid kitérítésként – aminek az eredményét erősen ki fogjuk használni – megvizsgáljuk, hogy összhangban van-e ez a megállapítás a tapasztalatokkal. Ennek kezdő lépéseként tekintsünk két inerciarendszert: K -t és K' -t, amelyek egymáshoz képest állandó sebességgel mozognak! Az egyszerűség kedvéért válasz-

szunk olyan koordináta-rendszereket, amelyeknek tengelyei párhuzamosak, és legyen K' sebessége K -ban $\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (mert így sebességét egyetlen kompon-

nenssel adhatjuk meg!). Ekkor

$$\Delta x = \Delta x' + v \Delta t', \quad \Delta y = \Delta y', \quad \Delta z = \Delta z', \quad \text{és} \quad \Delta t = \Delta t'; \quad \text{és} \quad \Delta x' = \Delta x - v \Delta t, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \text{és} \quad \Delta t' = \Delta t.$$

$$\text{Így, ha egy test sebessége } K\text{-ban } \vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{pmatrix}, \text{ akkor } K'\text{-ben } \vec{w}' = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \\ \frac{\Delta y'}{\Delta t'} \\ \frac{\Delta z'}{\Delta t'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x - v \Delta t}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{w} - \vec{v}.$$

Ez az ún. **Galilei-transzformáció**: köznapi sebességek esetén a tapasztalat maradéktalanul igazolja, a fény terjedésére azonban nem! A mérések szerint a fény minden inerciarendszerben $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú sebességgel terjed. Hogy ezzel a tapasztalattal összhangba kerülhessünk, általánosítsuk a Galilei-transzformáció távolságokra vonatkozó megállapításait, és vegyük figyelembe, hogy a fény mindkét vonatkoztatási rendszerben azonos nagyságú sebességgel terjed:

$$\Delta x = k(\Delta x' + v \Delta t'), \quad \Delta y = \Delta y', \quad \Delta z = \Delta z'; \quad \Delta x' = k(\Delta x - v \Delta t), \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z.$$

Ha a fény K -ban a valamely két pont közötti Δx távolságot Δt idő alatt futja be, K' -ben pedig az ugyanezen két pont közötti $\Delta x'$ távolságot $\Delta t'$ idő alatt, akkor $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$, és $\Delta t' = \frac{\Delta x'}{c}$. Ezeket az általánosított transzformációs formulákba behelyettesítve:

$$\Delta x = k(\Delta x' + v \Delta t') = k \left(\Delta x' + v \frac{\Delta x'}{c'} \right) = k \Delta x' \left(1 + \frac{v}{c'} \right); \quad \Delta x' = k(\Delta x - v \Delta t) = k \left(\Delta x - v \frac{\Delta x}{c} \right) = k \Delta x \left(1 - \frac{v}{c} \right),$$

ahol c a fény terjedési sebessége K -ban, c' pedig K' -ben. Ezekből

$$\Delta x \Delta x' = k \Delta x' \left(1 + \frac{v}{c'} \right) k \Delta x \left(1 - \frac{v}{c} \right) = k^2 \Delta x \Delta x' \left(1 + \frac{v}{c'} \right) \left(1 - \frac{v}{c} \right).$$

Felhasználva azt a tapasztalatot, hogy $c = c'$,

$$1 = k^2 \left(1 + \frac{v}{c'} \right) \left(1 - \frac{v}{c} \right) = k^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ezzel az elmozdulásokra vonatkozó transzformációs formulák:

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(\Delta x' + v\Delta t')$$

$$\Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(\Delta x - v\Delta t).$$

Ebből azonban kiderül, hogy az időtartamok is transzformálódnak: $\Delta x = k(\Delta x' + v\Delta t') \Rightarrow \Delta t' = \frac{1}{kv}(\Delta x - k\Delta x')$. Behelyettesítve $\Delta x'$ értékét:

$$\Delta t' = \frac{1}{kv} \left(\Delta x - k^2 \frac{(\Delta x - v\Delta t)}{\Delta x'} \right) = \frac{1}{kv} (\Delta x - k^2 \Delta x + k^2 v \Delta t) = k \Delta t + \frac{\Delta x}{kv} (1 - k^2) = k \Delta t + \frac{\Delta x}{kv} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)}_{1-k^2} = k \Delta t + \frac{\Delta x}{kv} \left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2} - 1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = k \Delta t - \frac{\Delta x}{kv} \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} = k \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right).$$

Hasonlóan:

$$\Delta x' = k(\Delta x - v\Delta t) \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{kv}(\Delta x + k\Delta x'),$$

$$\Delta t = \frac{1}{kv} \left(-\Delta x' + k^2 \frac{(\Delta x' + v\Delta t')}{\Delta x} \right) = \frac{1}{kv} (-\Delta x' + k^2 \Delta x' + k^2 v \Delta t') = k \Delta t' - \frac{\Delta x}{kv} (1 - k^2) = k \Delta t' - \frac{\Delta x}{kv} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)}_{1-k^2} = k \Delta t' - \frac{\Delta x}{kv} \left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2} - 1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = k \Delta t' + \frac{\Delta x}{kv} \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} = k \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x \right).$$

Összefoglalva az elmozdulásokra és az időtartamokra nyert transzformációs formulákat:

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(\Delta x' + v\Delta t')$$

$$\Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(\Delta x - v\Delta t);$$

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right)$$

$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right).$$

E transzformációs formulákat **Lorentz-transzformáció**nak nevezzük.

Speciális esetek

ha $\Delta t = 0 \Rightarrow \Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, távolság-kontrakció,

ha $\Delta x = 0 \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, idő-dilatáció.

Sebességtranszformáció

Feladat

Legyen egy test sebessége a K rendszerben \vec{w} , a K' rendszerben pedig \vec{w}' , miközben a K' vonatkoztatási rendszer K -ban $\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sebességgel mozog! Ha-

tárazzuk meg \vec{w}' -t \vec{w} -vel kifejezve!

Megoldás

Az elmozdulásokra és az időtartamokra vonatkozó transzformációs formulák felhasználásával:

$$w'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(\Delta x - v\Delta t)}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right)} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x} = \frac{w_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} w_x},$$

$$w'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right)}} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{w_y \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} w_x}$$

$$w'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{\Delta z}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right)}} = \frac{\frac{\Delta z}{\Delta t} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{w_z \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} w_x}$$

Összefoglalva a sebességtranszformációra komponensenként nyert eredményeket:

$$\vec{w}' = \begin{pmatrix} \frac{w_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} w_x} \\ w_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ \frac{w_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} w_x} \end{pmatrix}$$

A tömeg transzformációja

Feladat

Írjuk fel két azonos tömegű, ellentett vektorú sebességgel egymás felé mozgó test rugalmas ütközésében bekövetkező sebességváltozások komponenseit abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyben a sebességváltozások tengelyirányúak!

Megoldás

Az ütközés előtti sebességeket jelöljük \vec{w}_A és \vec{w}_B -vel, az ütközés utániakat pedig \vec{u}_A -val, ill. \vec{u}_B -vel! A lendületmegmaradás törvénye szerint $m_A (\vec{u}_A - \vec{w}_A) = -m_B (\vec{u}_B - \vec{w}_B)$, az ütközés rugalmas jellege miatt $u_A = w_A$, és $u_B = w_B$. A feladatszövegnek megfelelően válasszuk a koordináta-rendszer y -tengelyét az $\vec{u}_B - \vec{w}_B$ iránnyal megegyezőnek!

Mivel a két test egymás felé halad, $\vec{w}_A = -\vec{w}_B$, vagyis $w_{Ax} = -w_{Bx}$, $w_{Ay} = -w_{By}$. A feladat szövege szerint a sebességváltozás y irányú

$u_{Ax} - w_{Ax} = 0$, tehát $u_{Ax} = w_{Ax}$. Az ütközés rugalmas jellege miatt $u = w$, vagyis $u_{Ax}^2 + u_{Ay}^2 = w_{Ax}^2 + w_{Ay}^2$. Innen $u_{Ay} = \pm w_{Ay}$, $u_{Ay} = -w_{Ay}$.

A lendületmegmaradás törvénye miatt $\vec{u}_B - \vec{w}_B = -(\vec{u}_A - \vec{w}_A)$, s így

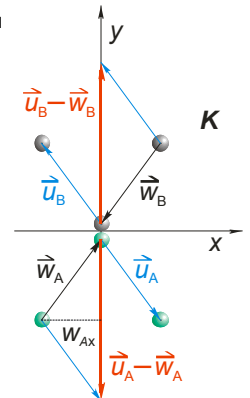
$$u_{Bx} - w_{Bx} = -(u_{Ax} - w_{Ax}) = 0 \Rightarrow u_{Bx} = w_{Bx}; \quad u_{By} - w_{By} = -\underbrace{(u_{Ay} + w_{Ay})}_{-2w_{Ay}} = 2w_{Ay} \Rightarrow u_{By} = 2w_{Ay} + \underbrace{w_{By}}_{-w_{Ay}} = w_{Ay}.$$

Összefoglalva

$$\vec{w}_A = \begin{pmatrix} w_{Ax} \\ w_{Ay} \end{pmatrix} \quad \vec{w}_B = \begin{pmatrix} -w_{Ax} \\ -w_{Ay} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_A = \begin{pmatrix} w_{Ax} \\ -w_{Ay} \end{pmatrix} \quad \vec{u}_B = \begin{pmatrix} -w_{Ax} \\ w_{Ay} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_A - \vec{w}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ -2w_{Ay} \end{pmatrix} \quad \vec{u}_B - \vec{w}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2w_{Ay} \end{pmatrix}$$



Feladat

Határozzuk meg két azonos tömegű, ellentett vektorú sebességgel egymás felé mozgó test rugalmas ütközésében bekövetkező sebességváltozások nagyságának arányát abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyben az ütközés előtt az egyik test tengelyirányban mozog!

Megoldás

Mozgjon a feladatszöveg szerint az újabb koordinátarendszerben (K') az A test az y' -tengely irányában, azaz legyen a K' (a mozgó vonatkoztatási rendszer) sebessége K -ban $v = w_{Ax}$! Ezt kihasználva a transzformálandó sebességek:

$$\vec{w}_A = \begin{pmatrix} w_{Ax} \\ w_{Ay} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w_{Ay} \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_B = \begin{pmatrix} -w_{Ax} \\ -w_{Ay} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -w_{Ay} \end{pmatrix};$$

$$\vec{u}_A = \begin{pmatrix} u_{Ax} \\ -w_{Ay} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -w_{Ay} \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_B = \begin{pmatrix} -w_{Ax} \\ w_{Ay} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ w_{Ay} \end{pmatrix}.$$

A mozgórendszerbeli sebességek meghatározásához alkalmazzuk a sebességtranszformációra nyert összefüggést:

$$\vec{w}'_A = \begin{pmatrix} \frac{w_{Ax} - v}{1 - \frac{v}{c^2} w_{Ax}} \\ \frac{w_{Ay} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} w_{Ax}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v - v}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ \frac{w_{Ay} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} w_{Ax}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{w_{Ay}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}, \quad \vec{u}'_A = \begin{pmatrix} \frac{u_{Ax} - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_{Ax}} \\ \frac{u_{Ay} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_{Ax}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v - v}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ \frac{-w_{Ay} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_{Ax}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-w_{Ay}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}.$$

Az A test ütközés előtti és ütközés utáni sebességének ismeretében az ütközésben bekövetkező sebességváltozás:

$$\vec{u}'_A - \vec{w}'_A = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ \frac{w_{Ay}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{-w_{Ay}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2w_{Ay}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}.$$

Transzformáljuk ezután a B test sebességeit a mozgó vonatkoztatási rendszerbe:

$$\vec{w}'_B = \begin{pmatrix} \frac{w_{Bx} - v}{1 - \frac{v}{c^2} w_{Bx}} \\ \frac{w_{By} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} w_{Bx}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-v - v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \\ \frac{-w_{Ay} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \\ \frac{-w_{Ay} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{u}'_B = \begin{pmatrix} \frac{u_{Bx} - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_{Bx}} \\ \frac{u_{By} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_{Bx}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-v - v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \\ \frac{w_{Ay} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \\ \frac{w_{Ay} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \end{pmatrix},$$

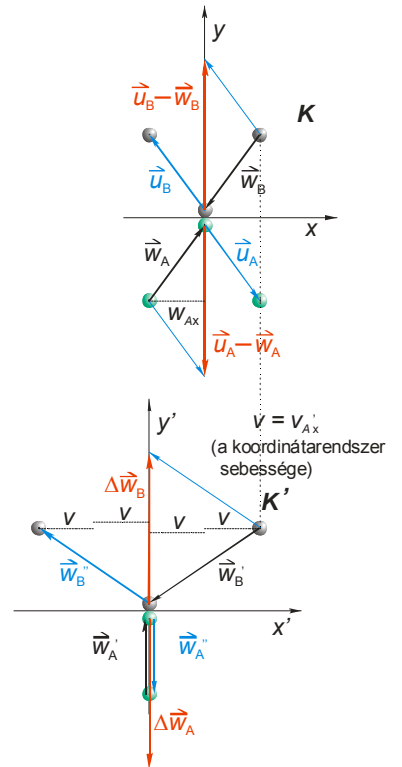
így a B test sebességváltozása a mozgó vonatkoztatási rendszerben:

$$\vec{u}'_B - \vec{w}'_B = \begin{pmatrix} \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} - \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \\ \frac{w_{Ay} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} - \frac{-w_{Ay} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2w_{Ay} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \end{pmatrix}.$$

Felhasználva az itt nyert sebességváltozásokat, a sebességváltozások nagyságának aránya K' -ben:

$$\frac{|\vec{u}'_B - \vec{w}'_B|}{|\vec{u}'_A - \vec{w}'_A|} = \frac{\frac{2w_{Ay} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v^2}{c^2}}}{\frac{2w_{Ay}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})^2}{(1 + \frac{v^2}{c^2})^2}} = \sqrt{\frac{(1 + \frac{v^2}{c^2})^2 - 4 \frac{v^2}{c^2}}{(1 + \frac{v^2}{c^2})^2}} = \sqrt{1 - \frac{4 \frac{v^2}{c^2}}{(1 + \frac{v^2}{c^2})^2}}.$$

A B test mozgó vonatkoztatási rendszerbeli sebességének x -komponensére a $w'_{Bx} = \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$ eredményt kaptuk, az A testre pedig $w'_{Ax} = 0$ -t, így ezeket a sebességváltozások nagyságának arányára kapott összefüggésbe behelyettesítve,



$$\frac{|\vec{u}'_B - \vec{w}'_B|}{|\vec{u}'_A - \vec{w}'_A|} = \sqrt{1 - \frac{4v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}\right)^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{w'^2_{Bx}}{c^2}}$$

A klasszikus mechanika szerint a lendületmegmaradás törvénye mind az álló, mind a mozgó vonatkoztatási rendszerben teljesül:

$$K\text{-ban: } m_A (\vec{u}_A - \vec{w}_A) = -m_B (\vec{u}_B - \vec{w}_B) \Rightarrow \frac{|\vec{u}_B - \vec{w}_B|}{|\vec{u}_A - \vec{w}_A|} = \frac{m_A}{m_B} = 1; \quad K'\text{-ben: } m_A (\vec{u}'_A - \vec{w}'_A) = -m_B (\vec{u}'_B - \vec{w}'_B) \Rightarrow \frac{|\vec{u}'_B - \vec{w}'_B|}{|\vec{u}'_A - \vec{w}'_A|} = \frac{m_A}{m_B} = 1,$$

ahol kihasználtuk, hogy azonos tömegű testek ütközését vizsgáltuk. Ugyanezen sebességváltozások nagyságának aránya azonban a mozgó vonatkoztatási rendszerben nem 1-nek adódik:

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{|\vec{u}'_B - \vec{w}'_B|}{|\vec{u}'_A - \vec{w}'_A|} = \frac{\sqrt{1 - \frac{w'^2_{Bx}}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{w'^2_{Ax}}{c^2}}},$$

s így a lendületmegmaradás törvénye csak a következő formában tartható fenn:

$$\frac{m_B}{\sqrt{1 - \frac{w'^2_{Bx}}{c^2}}} |\vec{u}'_B - \vec{w}'_B| = -\frac{m_A}{\sqrt{1 - \frac{w'^2_{Ax}}{c^2}}} |\vec{u}'_A - \vec{w}'_A|.$$

Az irányokat is figyelembe véve:

$$\frac{m_B}{\sqrt{1 - \frac{w'^2_{Bx}}{c^2}}} (\vec{u}'_B - \vec{w}'_B) = -\frac{m_A}{\sqrt{1 - \frac{w'^2_{Ax}}{c^2}}} (\vec{u}'_A - \vec{w}'_A).$$

Ez azt jelenti, hogy a lendületmegmaradás törvénye csak akkor tartható fenn, ha a testek tömegét sebességfüggőnek tekintjük:

$$m_A(K') = \frac{m_A(K)}{\sqrt{1 - \frac{w'^2_{Ax}}{c^2}}} |\vec{u}'_A - \vec{w}'_A| \quad \text{és} \quad m_B(K') = \frac{m_B(K)}{\sqrt{1 - \frac{w'^2_{Bx}}{c^2}}} |\vec{u}'_B - \vec{w}'_B|,$$

ahol $m_A(K)$ és $m_B(K)$ az A és a B test K rendszerben értelmezett tömege, $m_A(K')$ és $m_B(K')$ ugyanezen testek K' rendszerben értelmezett tömege, w'_{Ax} és w'_{Bx} pedig az A és a B test K' -beli sebességének x komponense. A kapott eredményt általánosan megfogalmazva, egy test tömege

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

ahol m_0 a test klasszikus fizika szerinti (megszokott értelemben vett) ún. **nyugalmi tömege**, v pedig a test sebességének nagysága az éppen használt vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva. A bemutatott megfontolás eredményét összegezve mondhatjuk, hogy a lendületmegmaradás csak akkor állhat összhangban a Lorentz-transzformációval, ha a testek tömegét sebességfüggőnek tekintjük a fenti összefüggés szerint. Azt a tárgyalási módot, amely figyelembe veszi a fény minden inerciarendszerbeli azonos nagyságú sebességgel történő terjedését, **relativisztikus mechanikának** nevezzük.

Megjegyzés

A klasszikus mechanika relativisztikus korrekciói a köznapi tapasztalatok szempontjából általában elhanyagolhatók, mert minden esetben $1 - \frac{v^2}{c^2}$ alakban jelennek meg, ami a köznapi sebességek tartományában csupán elenyésző korrekciót jelent, hiszen ha $v \leq 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$$1 - \frac{v^2}{c^2} \geq 1 - \frac{10^4 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{9 \cdot 10^{16} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 1 - \frac{1}{9} 10^{-12} \approx 1 - 10^{-13} = 0,999\,999\,999\,999\,900 \approx 1.$$

Az elektrosztatikus erőtvény relativisztikus korrekciója, mágneses mező

Feladat

Határozzuk meg egy végtelen hosszú, egyenes, λ vonalmenti töltéssűrűségű vezetőtől r távolságban a q töltésű próbatest gyorsulását a vezetőhöz képest nyugvó és egy a vezetőhöz képest v nagyságú, a vezetővel párhuzamos sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerben!

Megoldás

A vezetőhöz képest nyugalomban lévő vonatkoztatási rendszerben a térerősség meghatározásához vegyük körül a vezetőt egy ℓ hosszúságú, a vezetőhöz képest koncentrikusan elhelyezkedő hengerrel, és alkalmazzuk a Gauss-törvényt! A hengerszimmetria miatt a henger palástján a térerősség mindenütt radiális, és azonos nagyságú: $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r)$. Ezt kihasználva: $E(r) \underbrace{2r\pi\ell}_A = \frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{\lambda\ell}_Q \Rightarrow E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\lambda\ell}{2\pi r\ell} = 2k \frac{\lambda}{r}$. Mivel $\vec{E}(r)$ a vezetőre merőleges,

$$E_x(r) = 0, \text{ és } E_y(r) = E(r) = 2k \frac{\lambda}{r}.$$

A vezetőtől r távolságra lévő pontban a q töltésű próbatestre az elektromos mező az elektromos mező erőtvénye szerinti erőt fejt ki: $F_y(r) = 2k \frac{\lambda}{r} q$, így a próbatest gyorsulása a vezetőhöz képest nyugvó inerciarendszerben (K) a dinamika alaptörvényé szerint: $a_y = 2k \frac{\lambda}{r} \frac{q}{m}$. A vezetőhöz képest v nagyságú sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerben ugyanez a gyorsulás ugyanilyen módon: $a'_y = 2k \frac{\lambda'}{r'} \frac{q}{m'}$, ahol a vesszős mennyiségek a mozgó vonatkoztatási rendszerbeli értékeket jelölik. Határozzuk meg a vesszős mennyiségeket (= transzformáljuk az erőtvény változóit a mozgó vonatkoztatási rendszerbe):

- $r' = r$, mert a távolság $\perp \vec{v}$ -re,

- $Q = Q' \Rightarrow \lambda \Delta\ell = \lambda' \Delta\ell' = \lambda' \Delta\ell \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, mert a hiányzó vagy feleslegben lévő elektronok száma nem függ a vonatkoztatási rendszer választásától: a töltés ún. **Lorentz-invariáns** mennyiség,

- $m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ a tömeg transzformációjára vonatkozó eredményünk szerint.

Ezek felhasználásával,

$$a'_y = 2k \frac{\lambda'}{r'} \frac{q}{m'} = 2k \frac{\lambda}{r} \frac{q}{m} = 2k \frac{\lambda}{r} \frac{q}{m} = a_y.$$

A dinamika alaptörvénye mindkét rendszerben ugyanazt a gyorsulást szolgáltatja. Ugyanakkor a gyorsulás mégsem lehet azonos a két vonatkoztatási rendszerben, mert a Lorentz-transzformáció szerint $dt' = \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, így $v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dr'}{dt'} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = v_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Hasonlóan

$$a'_y = \frac{dv'_y}{dt'} = \frac{d\left(v_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)}{dt} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = a_y \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = a_y \text{erőtvény szerinti} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right),$$

azaz az így kapott eredmény ellentmond az erőtvény változóinak transzformálásából nyert eredménynek. Melyik a helyes? Mivel az utóbbi közvetlen logikai következménye annak a sokszor ellenőrzött tapasztalati ténynek, hogy a fény minden inerciarendszerben azonos nagyságú sebességgel terjed, az utóbbi a helyes.

Általában az erőtvények olyanok, hogy a változóik Lorentz-transzformációjával szolgáltatják a másik inerciarendszerbeli gyorsulást – különben mindegyiknek tartalmaznia kellene egy a rendszer választására vonatkozó adatot. Az elektrosztatikus erőtvény azonban nem ilyen! A korrekciós tag itt:

$$a'_y \text{ korrekció} = -\frac{v^2}{c^2} a_y \text{erőtvény szerinti},$$

ami valóban tartalmazza a vonatkoztatási rendszer választására vonatkozó adatot, ti. v a választott vonatkoztatási rendszer sebességének nagysága.

A korrigált erőtvény

Az előbbiek szerint az elektrosztatikai erőtvény mozgó vonatkoztatási rendszerben csak akkor ad helyes eredményt, ha kiegészítjük egy a vonatkoztatási rendszer választásától függő korrekciós taggal:

$$F'_y = F_y \text{ elektrosztat. erőtv. szerinti} + F_y \text{ korrekció} = m' \left(a_y \text{ elektrosztat. erőtv. szerinti} + a_y \text{ korrekció} \right) = 2k \frac{\lambda'}{r'} q - \frac{v^2}{c^2} 2k \frac{\lambda'}{r'} q.$$

A mozgó vonatkoztatási rendszerből a töltött vezető áramnak látszik, amelynek erőssége: $I' = \frac{\frac{dQ}{dv} n' e}{dr'} = \frac{A v \frac{dn'}{dr'} e dl'}{\frac{dr'}{dl'} v} = \frac{\frac{dQ'}{dl'}}{dl'} v = \lambda' v$. Ezzel a korrekciós erő:

$$F_y^{\text{korrekció}} = -\frac{2k\lambda' v^2}{r'} = -2 \frac{k}{c^2} \frac{I'}{r'} qv = \underbrace{-2k^* \frac{I'}{r'}}_{\text{körülmenyek jellemzője}} \underbrace{qv}_{\text{test jellemzője}}$$

ahol $k^* = \frac{k}{c^2}$. Olyan ez, mintha magát a korrekciós erőt is egy mező keltené, amelynek „télerőssége” $2k^* \frac{I}{r}$.

A továbbiakban elhagyjuk a vonatkoztatási rendszer választására utaló vesszőt, és a korrekciót mint egy újabb mező (= **mágneses mező**) megjelenését szemléljük, a körülményeket parametrizáló tényezőt, amit azonban nem az így értelmezett mező télerősségének nevezünk (bár sok szempontból úgy lenne logikus), hanem **mágneses indukciónak**.

$$F_{\text{magn.,y}} = \underbrace{2k^* \frac{I}{r}}_{\text{mező adata}} qv = B(r)qv.$$

Eszerint a végtelen hosszú, egyenes vezetőtől származó mágneses indukció: $B = 2k^* \frac{I}{r}$. A mágneses indukció SI egysége:

$$[B] = \frac{[k] [I]}{[c^2] [r]} = \frac{\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \text{A}}{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \text{m}} = \frac{\text{Ns}^2 \text{A}}{\text{C}^2 \text{m}} = \frac{\text{NA}}{\text{A}^2 \text{m}} = \frac{\text{J}}{\text{Am}^2} = \frac{\text{VAs}}{\text{Am}^2} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{T (tesla)}.$$

Mivel a vizsgált feladatban $F_{\text{magn.,y}} = F_{\text{magn.}}$, és $v_x = v$, $\vec{F}_{\text{magn.}} \perp \vec{v}$, ami $\vec{F}_{\text{magn.}}$ és \vec{v} kapcsolatában külső szorzatot sejtet. Ha B -hez irányt is rendelünk (= vektorként definiáljuk), $\vec{F}_{\text{magn.}} = q\vec{v} \times \vec{B}$, vagyis $F_{\text{magn.,y}} = q(v_z B_x - v_x B_z)$, ami most $v_z = 0$ miatt az $F_{\text{magn.,y}} = -qv_x B_z$ eredményt adja. Ezt a kapott eredménnyel összevetve leolvashatjuk, hogy $B_z = 2k^* \frac{I}{r}$, ami azt jelenti, hogy a feltevés (miszerint B -hez érdemes irányt is rendelni) termékenynek bizonyult. A jelen példában \vec{B} -t z irányúnak érdemes választani, vagyis \vec{v} -re is, \vec{F} -re is merőlegesnek, mégpedig úgy, hogy $\vec{v}, \vec{B}, \vec{F}$ jobbsodrású legyen, hiszen $v_x < 0$ mellett így adódik $F_{\text{magn.,y}} > 0$ -nak. Ez az út más esetekben is követhető, vagyis általában is mondhatjuk, hogy

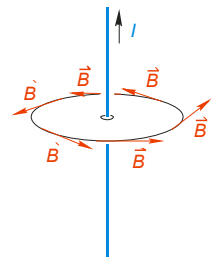
$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

ahol \vec{F}_m -et **mágneses erőnek**, \vec{B} -t **mágneses indukciónak** nevezzük, és az áramátjárta vezető körül kialakuló mágneses mező olyasféle jellemzőjének tekintjük, mint az elektromos télerősséget az elektrosztatikus mező esetében. Ebben az összefüggésben \vec{v} a q töltésű test sebessége a választott inerciarendszerben, s mint ilyen a vonatkoztatási rendszer választásától függ.

A mágneses mező által kifejtett erőre vonatkozó összefüggést **Lorentz-törvénynek** nevezzük (az általa szolgáltatott erőt pedig igen gyakran **Lorentz-erőnek**).

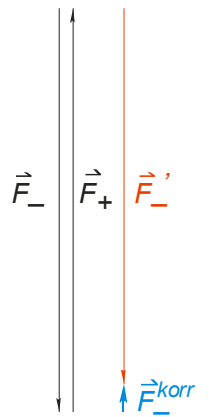
Összefoglalva

A hosszú, egyenes vezető által keltett mágneses indukció minden pontban merőleges a vezetőre, nagysága a vezetőtől mért távolságtól függ: $B(\vec{r}) = B(r) = 2 \frac{k}{c^2} \frac{I}{r}$, \vec{B} minden pontban merőleges a vezetőre, és az áram irányával ún. **jobbsavart** alkot.



Megjegyzés

- Mint azt már korábban megjegyeztük, a relativisztikus korrekciók általában elhanyagolhatók, hiszen „emberléptékű” sebességek esetében $1 - \frac{v^2}{c^2}$ igen jó közelítéssel (messze a mérési pontosságon belül!) 1-nek tekinthető. Ezek után legalábbis **meglepő**, hogy a gyakorlati életben oly nagy szerepet játszó mágnesség nem egyéb, mint az elektrosztatikus erő relativisztikus korrekciója. Ráadásul magát az elektrosztatikus erőt a gyakorlati életben alig-alig veszünk észre! Ennek magyarázata abban rejlik, hogy a gyakorlatban **töltetlen** testek fordulnak elő: a pozitív és negatív töltéshordozók egyenlő számban vannak bennük (még az áramot vezető huzalban is!), így aztán a töltéshordozóktól származó elektromos erők nullára összegződnek. Ez az összeg azonban két **igen nagy**, ellentétes irányú erőből áll elő (a töltéshordozók száma $\sim 10^{23}$!), amelyek közül bármelyik igen kicsiny megváltozása is számottevő lehet (legalábbis a korábbi összeghez mérten, ami nulla volt!). A fémes vezetőkben folyó áramok pedig éppen ilyen jellegűek: a vezetékben mozgó elektronok által keltett télerősség nagysága igen kis (relativisztikus) mértékben eltér a rációnok által keltett télerősségétől, ami a korábbi nulla összeget észrevehetően megváltoztatja. Ezt érzékeljük mágneses kölcsönhatásként.
- Ahogyan az elektromos mezőt szokás erővonalak rajzolásával szemléletessé, képszerűvé tenni, ugyanúgy szokás a mágneses mezőhöz **indukcióvonalakat** rajzolni. Ennek szerepe és használatának korlátai pontosan azonosak az erővonalakkal kapcsolatban elmondottakkal, így ezeket itt nem ismételjük meg.
- Imént kapott eredményünket az indukcióvonal fogalmával megfogalmazva mondhatjuk, hogy a végtelen hosszú egyenes vezető mágneses mezőjének indukcióvonalai a vezetőt jobbsavarként övező koncentrikus körök, amelyek középpontja a vezetőre illeszkedik.



– Ahogyan az erővonalakat szokás „kísérletileg kimutatni”, ugyanúgy a mágneses mező indukcióvonalaival kapcsolatban is szokás bizonyos jelenségkört bemutatni, aminek eredményeképpen az indukcióvonalakhoz hasonlatos ábrák rajzolódnak ki (pontosan azonos mechanizmus alapján, mint az erővonalak esetében az elektromos mezőben). A különbség csak annyi, hogy az apró mágneses dipólok a búzadara helyett vasreszelék-szemcsékből alakítják ki, továbbá, hogy ezeket alkalmas folyadék hiányában (ti, amelyen a vasreszelék-szemcsék úsznának), nem valamilyen folyadék felszínére szórják, hanem szilárd felületre. Az így kialakuló ábrák – ahhoz hasonlóan, mint az erővonalak az elektromos mező esetében – a mágneses mező „szerkezetének” bemutatására, képszerűvé tételére alkalmasak, és csak igen kevésbé a mágneses mező mennyiségi jellemzésére.

Feladat

Számoljuk ki a végtelen hosszú, egyenes vezetőől származó mágneses indukció **örvényerősségét** (zárt görbére vett integrálját) a vezetőt koncentrikusan körülvevő körre!

Megoldás

Kihhasználva, hogy B csak a vezetőtől mért távolságtól függ, továbbá, hogy alkalmas körüljárás irány mellett $\vec{B} \uparrow \uparrow d\vec{r}$, s így $\vec{B}d\vec{r} = B|d\vec{r}|$,

$$\oint_G \vec{B} d\vec{r} = 2 \frac{k}{c^2} \frac{I}{r} \underbrace{2r\pi}_{\text{kerület}} = 4\pi \frac{k}{c^2} I = \mu_0 I.$$

Más, tetszőleges zárt görbére is ez adódik:

$$\oint_G \vec{B} d\vec{r} = \oint_G B \cos \alpha |d\vec{r}| = \oint_G B \cos \alpha \frac{rd\varphi}{|\cos \alpha|} = \int_0^{2\pi} 2 \frac{k}{c^2} \frac{I}{r} r d\varphi = 2 \frac{k}{c^2} I \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \frac{k}{c^2} I = \mu_0 I,$$

ahol több konstans összevonásaként bevezettük a $\mu_0 = 4\pi \frac{k}{c^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$ jelölést. μ_0 SI egysége: $[\mu_0] = \frac{[k]}{[c^2]} = \frac{\text{Nm}^2}{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{Ns}^2}{\text{C}^2} = \frac{\text{J}}{\text{A}^2} = \frac{\text{Ws}}{\text{A}^2 \text{m}} = \frac{\text{V}\lambda_{\text{S}}}{\text{A}^2 \text{m}} = \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$. Értéke:

$$\mu_0 = 4\pi \frac{k}{c^2} = 4\pi \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}}{(3 \cdot 10^8)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 4\pi \frac{9 \cdot 10^9}{9 \cdot 10^{16}} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} = 1,257 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}.$$

Látjuk, hogy az elektromos–mágneses törvényekben szereplő egységrendszeri állandókat a fény terjedési sebessége kapcsolja össze:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}},$$

ami persze nem meglepő, hiszen a mágnességre vonatkozó μ_0 -t éppen abból kiindulva kaptuk, hogy a fény terjedési sebessége bármely inerciarendszerben azonos.

Az Ampère-féle gerjesztési törvény

Az áramátjárta vezetőől származó mágneses indukcióra nyert eredményt általánosíthatjuk:

$$\oint_G \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 \int_F \vec{j} d\vec{A}$$

Ezt az összefüggést **I. Maxwell-törvénynek**, és felismerője után **Ampère-féle gerjesztési törvénynek** is nevezzük. (Később további taggal fogjuk kiegészíteni.) $d\vec{r}$ -nek és $d\vec{A}$ -nak a görbementi és a felületi integrálok együttes megjelenésére vonatkozó megállapodás szerint jobbsodrásúnak kell lennie!

Feladat

Határozzuk meg a mágneses indukció értékét egy végtelen kiterjedésű, j_v vonalmenti áramsűrűséggel átjárt vezető síktól r távolságban!

Megoldás

A **vonalmonti áramsűrűség** értelmezése szerint a vezető sík $d\ell$ szélességű sávjában folyó áram erőssége $dI = j_v d\ell$. Zárjuk körbe a $d\ell$ szélességű sávot egy téglalap oldalával, melynek két oldala párhuzamos a síkkal, és r távolságra fut tőle, két oldala pedig merőleges a síkra, majd alkalmazzuk az Amperè-törvényt! A síkkal párhuzamos oldalak mentén a szimmetria miatt a mágneses indukció állandó. Iránya (ugyancsak a szimmetria miatt) az áram irányával vagy párhuzamos, vagy merőleges arra. A végtelen hosszú egyenes vezetőre nyert eredménnyel azonban csak akkor vagyunk összhangban, ha $\vec{B}(\vec{r})$ az áram irányára merőleges, mégpedig úgy, hogy jobbsodrású legyen vele. Ennek felhasználásával a gerjesztési törvény: $\underbrace{B(r)2a + 4r \cdot 0}_{\oint_G \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r}} = \mu_0 \int_F \vec{j} d\vec{A} = \mu_0 I = \mu_0 j_v a$. Innen

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2} j_v.$$

Látjuk, hogy B nem függ a síktól mért távolságtól (hasonlóan, mint ahogyan a töltött sík által keltett elektromos térerősség sem függött tőle).

Feladat

Határozzuk meg az n vonalmenti menetsűrűségű, végtelen hosszú, I árammal átjárt tekercs (= **szolenoid**) belsejében a mágneses indukció értékét!

Megoldás

A tekercs belsejében az egy-egy menet átellenes darabjaitól származó indukciójárlék azonos irányú, a tekercsen kívül pedig ellentétes, ezért a tekercsen belül az indukció nagyságrendekkel nagyobb lehet, mint azon kívül. Mivel a végtelen hosszú tekercs a tengely-menti eltolással szemben invariáns, az indukció is ilyen, vagyis nagysága a tekercs tengelye mentén mindenütt ugyanakkora. Zárt görbe gyanánt vegyünk fel egy olyan téglalapot, amelynek két ℓ hosszúságú oldala párhuzamos a tekercs tengelyével, s egyike a tekercs belsejében, másika a tekercsen kívül halad. E téglalap felületét a tekercs menetei $n\ell$ -szer dőfik át, így a zárt görbe által felfeszített felületen $n\ell I$ áram folyik át. Ennek felhasználásával a gerjesztési törvény:

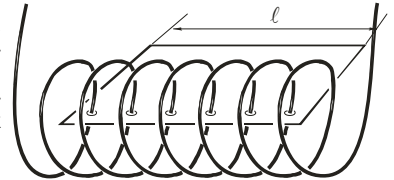
$$\int_G \vec{B} d\vec{r} = \underbrace{B\ell + 0 \cdot \ell + 0 + 0}_{\oint_G \vec{B} d\vec{r}} = \mu_0 \int_F \vec{j} d\vec{A} = \mu_0 n\ell I.$$

Innen a tekercs belsejében

$$B = \mu_0 nI$$

indukciónagyság adódik.

- Látniuk, hogy B nem függ a tekercs átmérőjétől.
- Az egyes vezetékszakaszoktól származó, a tekercs belsejében azonos irányú indukciójárlékok irányának figyelembevételével látható, hogy a tekercs árama a tekercs belsejében uralkodó indukció irányát *jobbcsvarként* veszi körbe. Ez egyben azt is jelenti, hogy ha a tekercselés a szolenoidba befolyó áram mentén haladva jobbsodrású, akkor \vec{B} arra mutat, amerre az áram a szolenoid mentén halad, ha balsodrású, akkor \vec{B} iránya a szolenoid mentén haladó áraméval ellentétes.

**Megjegyzés**

Az eredményt arra az esetre is érvényesnek tekinthetjük, amelyben a tekercs hossza ugyan nem végtelen, de lényegesen nagyobb, mint az átmérője. (Hasonlóan ahhoz, ahogyan a végtelen töltött síkokkal összeállított síkkondenzátorban uralkodó térősségre nyert eredményt is alkalmazhatjuk a véges kiterjedésű lemezekből összeállított kondenzátorra is, ha a lemezek „átmérője” sokkal nagyobb, mint a lemezek távolsága.) Ha a tekercs véges hossza ℓ , meneteinek száma a vonalmenti menetsűrűség értelmezése szerint $N = n\ell \Rightarrow n = \frac{N}{\ell}$, s így $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$.

Feladat

Határozzuk meg az R sugarú, I árammal átjárt körtekercs (= **toroid**) belsejében a mágneses indukció értékét!

Megoldás

Lényegében a szolenoidnál alkalmazott gondolatmenetet követhetjük, azzal az értelemszerű különbséggel, hogy a tekercs hossza helyett $2R\pi$ -t írunk:

$$B = \mu_0 \frac{N}{2R\pi} I.$$

\vec{B} itt is tengelyirányú (R az ún. középkör sugara: a toroid külső és belső sugarának számtani közepe).

Tetszőleges vezetőrendszer által keltett mágneses indukció**Feladat**

Határozzuk meg azon dQ töltésmennyiségtől származó $d\vec{E}$ térerősség relativisztikus korrekcióját (konkrétan $d\vec{B}$ -t), amely dt idő alatt halad át a vezető valamely keresztmetszetén!

Megoldás

Vizsgáljuk meg először valamely a töltéstől származó $\vec{E}(\vec{r})$ és a relativisztikus korrekciót jellemző $\vec{B}(\vec{r})$ kapcsolatát: $B_z(\vec{r}) = 2 \frac{k}{c^2} \frac{I}{r} = 2 \frac{k}{c^2} \frac{\lambda v}{r} = \frac{1}{c^2} E_y(\vec{r}) v$, vagyis $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}(\vec{r})$. Ezt felhasználva, továbbá azt, hogy ha a dt idő elegendően rövid (vagyis a kiszemelt keresztmetszeten a dt idő alatt átáramlott töltés a vezetőnek elegendően rövid $d\vec{\ell} = \vec{v} dt$ szakaszát tölti meg), a töltés pontszerűnek tekinthető, vagyis a tőle származó térerősség a ponttöltésre vonatkozó forrástörvény szerint számolható:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times k \frac{dQ}{r^3} \vec{r} = \frac{k}{c^2} \frac{1}{r^2} \vec{v} \times dQ \frac{\vec{r}}{r} = \frac{k}{c^2} \frac{1}{r^2} dQ \vec{v} \times \frac{\vec{r}}{r} = \frac{k}{c^2} \frac{1}{r^2} I \Delta t \vec{v} \times \frac{\vec{r}}{r} = \frac{k}{c^2} \frac{I}{r^3} d\vec{\ell} \times \vec{r},$$

ahol \vec{r} a vezetődarabtól mutat arra a helyre, ahol $d\vec{B}$ -t meg akarjuk határozni.

Összefoglalva

Az I árammal átjárt vezető $d\vec{\ell}$ darabja az \vec{r} helyvektorú helyen

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{k}{c^2} \frac{I}{r^3} d\vec{\ell} \times \vec{r}$$

indukciójárárlékok szolgáltatót. Ezt az összefüggést **Biot-törvénynek** nevezzük. Felhasználva az egységrendszerre jellemző konstansok összefüggését, $\frac{k}{c^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}$, amivel a Biot-törvényt a

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} d\vec{\ell} \times \vec{r}$$

alakban is megfogalmazhatjuk.

A kiterjedt vezetőrendszer által keltett \vec{B} -t az egyes vezetődaraboktól származó $d\vec{B}$ járulékok összegzésével nyerhetjük:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_G d\vec{B}(\vec{r}) = \int_G \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} d\vec{\ell} \times \vec{r}.$$

Feladat

Határozzuk meg a végtelen hosszú, I árammal átjárt, egyenes vezetőtől által keltett mágneses indukció értékét a vezetőtől r távolságban!

Megjegyzés

E feladat eredményét már ismerjük, hiszen éppen ezen elrendezés alapján vezettük be magát a \vec{B} -t. Most azonban ellenőrizhetjük, hogy a Biot-törvény is ugyanazt az eredményt szolgáltatja.

Megoldás

Vegyünk fel egy koordinátarendszert úgy, hogy az x -tengelye a vezetőbe essen, a vizsgált pont pedig az y -tengelyre! Ekkor a vizsgált pontba mutató hely-

vektor $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, így a vezető x helyen levő dx darabjától a vizsgált pontba mutató vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0-x \\ y_0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, a $d\vec{\ell}$ vektor pedig $d\vec{\ell} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ezekkel

$$d\vec{\ell} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & 0 \\ -x & y_0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_0 dx \end{pmatrix}.$$

A Biot-törvény szerint:

$$\vec{B}_z(\vec{r}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} (d\vec{\ell} \times \vec{r})_z = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0}{r^3} dx = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{y_0}{\frac{y_0^2}{\cos^2 \alpha}} \frac{dx}{d\alpha} d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi y_0} I \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi y_0} I [\sin \alpha]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mu_0}{4\pi y_0} I (1+1) = \frac{\mu_0}{2\pi y_0} I.$$

$d\vec{\ell} \times \vec{r}$ x és y komponense 0, ezért $\vec{B}(\vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0}{2\pi y_0} I \end{pmatrix}$. Ez valóban annyi, mint amit korábban kaptunk, ami alátámasztja a Biot-törvény helyességét. Szokás ezt az összefüggést **Biot-Savart-törvény**ként is emlegetni.

Feladat

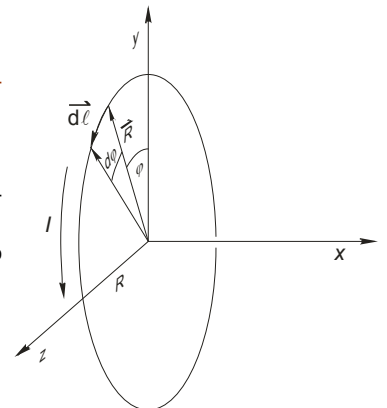
Határozzuk meg az I árammal átjárt, R sugarú körvezetőtől származó mágneses indukció értékét a körvezető tengelye mentén a körvezető középpontjától mért távolság függvényében!

Megoldás

Vegyünk fel egy koordinátarendszert, úgy, hogy az $y-z$ sík a körvezető síkjába essen, az origó pedig a kör közép-

pontjába! \vec{R} 90°-os elforgatásával a kör érintőjébe eső vektorhoz jutunk: $\vec{R}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}$. Ebből csupán az irányt hordozó

$$\text{egységvektort készítünk: } \frac{\vec{R}^*}{R^*} = \frac{1}{R^*} \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}.$$



A $\overline{d\varphi}$ szögelforduláshoz tartozó $\overline{d\ell}$ ezek után: $\overline{d\ell} = \frac{R d\varphi}{R} \overline{R^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} d\varphi$. A $\overline{d\ell}$ vezetődarabtól a vizsgált pontba mutató helyvektor: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_0 - 0 \\ 0 - y \\ 0 - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$,

$$\overline{d\ell} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -z d\varphi & y d\varphi \\ x_0 & -y & -z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 d\varphi + y^2 d\varphi \\ x_0 y d\varphi \\ x_0 z d\varphi \end{pmatrix}. \text{ Kihasnálva, hogy } z = R \sin \varphi, y = R \cos \varphi, \text{ a Biot-törvény szerint:}$$

$$B_x(x_0) = \int dB_x(x_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left(\int_0^{2\pi} \underbrace{R^2 \sin^2 \varphi}_{z^2} d\varphi + \int_0^{2\pi} \underbrace{R^2 \cos^2 \varphi}_{y^2} d\varphi \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} R^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} 2\pi R^2 =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{R^2}{(R^2 + x_0^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{m_x}{(R^2 + x_0^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ahol bevezettük az $m_x = IR^2\pi = IA$ jelölést. Az IA mennyiséget **mágneses momentum**nak nevezzük, és irányt is rendelünk hozzá, mégpedig úgy, hogy az a körülfutó árammal jobcsavart alkosson. A mágneses momentum SI egysége: $[m] = [I][A] = \text{Am}^2$. (m_x lényegében az így nyert mágneses momentum vektorának az x -komponense.)

Hasonlóan határozhatjuk meg $B_y(x_0)$ és $B_z(x_0)$ értékét is:

$$B_y(x_0) = \int dB_y(x_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} x_0 \int_0^{2\pi} \underbrace{R \cos \varphi}_{y} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} x_0 R \underbrace{[\sin \varphi]_0^{2\pi}}_{0-0} = 0, \text{ és } B_z(x_0) = \int dB_z(x_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} x_0 \int_0^{2\pi} \underbrace{R \sin \varphi}_{z} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} x_0 R \underbrace{[-\cos \varphi]_0^{2\pi}}_{0-0} = 0.$$

Összefoglalva

$$\vec{B}(\vec{r}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{m_x}{(R^2 + x_0^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

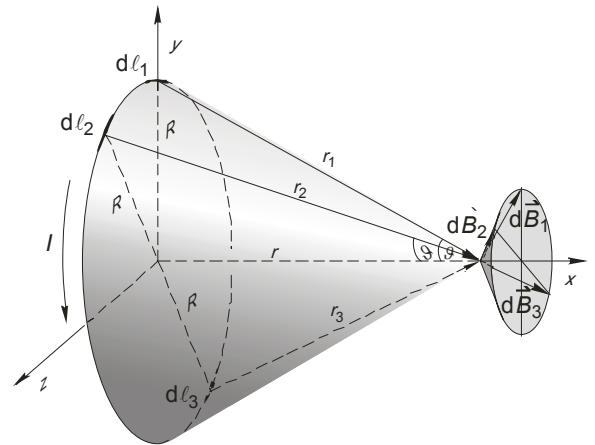
Másik megoldás

Kihasnálva, hogy $r_1 = r_2 = r_3 = \dots = \sqrt{R^2 + r^2}$, először is belátjuk, hogy a körvezető középpontjától r távolságban $B_y = B_z = 0$ (a szimmetria miatt). Ezt követően a Biot-törvény

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \overline{d\ell} \times \vec{r}_0 \text{ alakjából}$$

$$B_x = \oint_{\kappa} dB_x = \oint_{\kappa} |d\vec{B}| \sin \vartheta = \oint_{\kappa} \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2 + r^2} d\ell \sin \vartheta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2 + r^2} \sin \vartheta \oint_{\kappa} d\ell = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2 + r^2} \sin \vartheta 2R\pi =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2 + r^2} \sin \vartheta 2R\pi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2 + r^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + r^2}} 2R\pi = \frac{\mu_0 IA}{2\pi (R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 m}{2\pi (R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$



Feladat

Határozzuk meg egy I árammal átjárt, ℓ hosszúságú, $2R$ átmérőjű szolenoid által keltett mágneses indukció nagyságát a tekercs tengelyében a tekercs középpontjától mért távolság függvényeként!

Megoldás

A szolenoid egy-egy menetét körvezetőnek tekintve, az egyes körvezetőktől származó indukciójárálekokat kell összegeznünk:

$$B_x = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} dB_x = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\mu_0 IA}{2\pi (R^2 + (x_0 - x)^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{ndx}{dN} = \frac{\mu_0 nIR^2}{2\pi} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{1}{(R^2 + (x_0 - x)^2)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{\mu_0 nIR^2}{2} \int_{x_0 - \frac{\ell}{2}}^{x_0 + \frac{\ell}{2}} \frac{1}{(R^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}} dx' =$$

$$= \frac{\mu_0 nIR^2}{2} \int_{x_0 - \frac{\ell}{2}}^{x_0 + \frac{\ell}{2}} \frac{1}{(R^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}} dx' = \frac{\mu_0 nI R^2}{2} \left[\frac{x}{R^2 \sqrt{R^2 + x'^2}} \right]_{x_0 - \frac{\ell}{2}}^{x_0 + \frac{\ell}{2}} = \frac{\mu_0 nI}{2} \left(\frac{x_0 + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{R^2 + (x_0 + \frac{\ell}{2})^2}} - \frac{x_0 - \frac{\ell}{2}}{\sqrt{R^2 + (x_0 - \frac{\ell}{2})^2}} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{2} nI \left(\frac{\frac{2x_0}{\ell} + 1}{\sqrt{\frac{4R^2}{\ell^2} + \left(\frac{2x_0}{\ell} + 1\right)^2}} - \frac{\frac{2x_0}{\ell} - 1}{\sqrt{\frac{4R^2}{\ell^2} + \left(\frac{2x_0}{\ell} - 1\right)^2}} \right) = \frac{\mu_0}{2} nI \left(\frac{x^* + 1}{\sqrt{R^{*2} + (x^* + 1)^2}} - \frac{x^* - 1}{\sqrt{R^{*2} + (x^* - 1)^2}} \right),$$

ahol $R^* = \frac{2R}{\ell}$, és $x^* = \frac{2x_0}{\ell}$. A tekercs középpontjában $x^* = 0$, így $B_x(0) = \frac{\mu_0}{2} nI \left(\frac{1}{\sqrt{R^{*2} + 1}} + \frac{1}{\sqrt{R^{*2} + 1}} \right) = \frac{\mu_0}{2} nI \frac{2}{\sqrt{R^{*2} + 1}} = \mu_0 nI \frac{1}{\sqrt{\frac{4R^2}{\ell^2} + 1}} = \mu_0 nI \frac{\ell}{\sqrt{4R^2 + \ell^2}}$. Ha,

$\ell \gg 2R \Rightarrow \sqrt{4R^2 + \ell^2} \approx \ell$, így a tekercs középpontjában a mágneses indukció $B_x(0) = \mu_0 nI \frac{\ell}{\sqrt{4R^2 + \ell^2}} \approx \mu_0 nI \frac{\ell}{\ell} = \mu_0 nI$. Természetesen ugyanezt kaptuk, ami-

kor a tekercset végtelen hosszúnak tekintve számoltunk. A tekercs végénél $x^* = \frac{2x_0}{\ell} = \frac{2 \cdot \frac{\ell}{2}}{\ell} = 1$, s így $B_x\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{\mu_0}{2} nI \frac{2}{\sqrt{R^{*2} + 4}} = \frac{\mu_0 nI}{2 \sqrt{1 + \frac{R^2}{\ell^2}}}$. Ugyanennyi adódik a

tekercs másik végén is. Ha $\ell \gg 2R \Rightarrow B_x\left(-\frac{\ell}{2}\right) = B_x\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{\mu_0 nI}{2}$, vagyis az igen hosszú (de véges hosszúságú) tekercs végeinél a mágneses indukció éppen

fele akkora, mint a tekercs közepén. Még nagyobb az indukció esése, ha a tekercs rövid.

Például, ha $\ell = 2R$ ($R^* = 1$), akkor a tekercs végén (ahol $x^* = 1$ vagy $x^* = -1$)

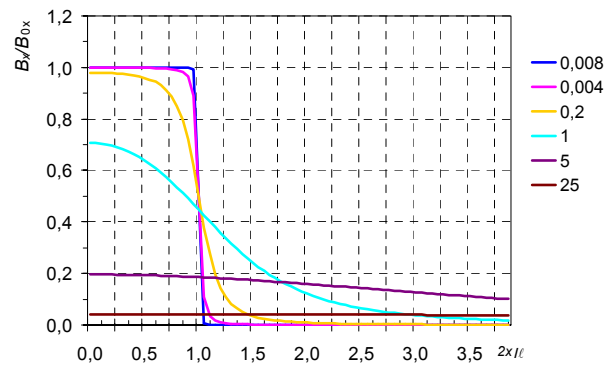
$B_x\left(-\frac{\ell}{2}\right) = B_x\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{\mu_0 nI}{\sqrt{5}}$. A tekercs végétől távol, vagyis ha $x^* \gg 1 \Rightarrow x_0 \gg \frac{\ell}{2}$, akkor

$$B_x\left(x_0 \gg \frac{\ell}{2}\right) = \frac{\mu_0}{2} nI \left(\frac{x^*}{\sqrt{R^{*2} + x^{*2}}} - \frac{x^*}{\sqrt{R^{*2} + x^{*2}}} \right) = 0.$$

A mellékelt ábrán láthatjuk, hogy az eredményül kapott függvény szerint hogyan alakul $B_x\left(\frac{2x_0}{\ell}\right)$ a tekercs középpontjától mért távolság függvényében. Láthatjuk, hogy a $\frac{2x_0}{\ell} = 1$

értéknél (vagyis a tekercs végénél) B_x értéke annál meredekebben esik, minél kisebb $\frac{2R}{\ell}$ (vagyis minél közelebb áll a szolenoid az „igen hosszú” feltételhez). Különböző színekkel a különböző $\frac{2R}{\ell}$ értékekhez tartozó görbéket rajzoltuk meg. A függőleges tengelyen B_x értékét $B_{0x} = \mu_0 nI$ -re normalva adtuk meg (ennyit kaptunk a végtelen hosszú szolenoid belsejében uralkodó B -re).

B_x a szolenoid tengelyében



A mágneses mező forrásmentessége

Feladat

Határozzuk meg az I árammal átjárt, $\bar{d}\ell$ vezetődarabtól származó indukció fluxusát a vezetődarabot koncentrikusan körülvevő hengerre (zárt felület) vonatkozóan!

Megoldás

Mivel $\bar{d}\vec{B}$ a vezetőre (s így a henger tengelyére is) mindenütt merőleges, a hengert lezáró körlapokon a fluxus nulla, hiszen $\bar{d}\vec{B} \perp \bar{d}\vec{A}$. Ugyanez a helyzet a henger palástján is, így $\oint_F \bar{B} \cdot \bar{d}\vec{A} = 0$.

Feladat

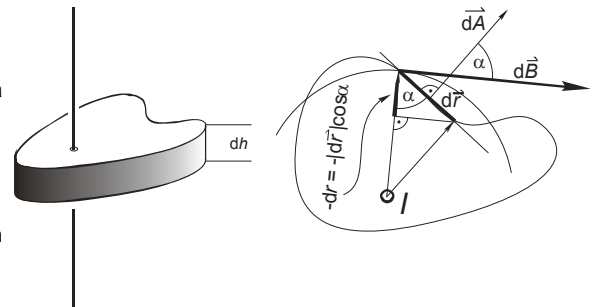
Határozzuk meg az I árammal átjárt, $\bar{d}\ell$ vezetődarabtól származó indukció fluxusát a tetszőleges alakú alappal rendelkező, de a vezetőt hengerszerűen övező test felületére vonatkozóan!

Megoldás

A hengerszerű test alapjain most is nulla fluxus adódik, hiszen $\bar{d}\vec{B} \perp \bar{d}\vec{A}$ most is teljesül. Más a helyzet azonban a paláston. Ha $\bar{d}\vec{B}$ a felület normálvektorával α szöveget zár be,

$$\bar{B} \cdot \bar{d}\vec{A} = B dA \cos \alpha = B \underbrace{dh}_{dA} \underbrace{d\vec{r}}_{|d\vec{r}|} \cos \alpha = -B dh \frac{dr}{\frac{4\pi r}{B(\vec{r})}} \cos \alpha = -B dh dr = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} dh dr.$$

Ennek alapján $\vec{B}(\vec{r})$ -nek a hengerszerű test teljes felületére vonatkozó fluxusa már könnyen meghatározható:



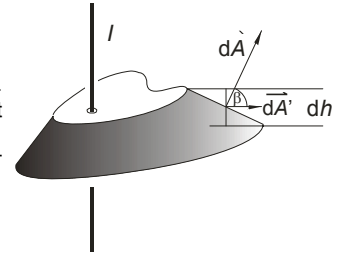
$$\oint_F \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \int_A \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} + \int_P \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = - \int_P \frac{\mu_0 I}{4\pi r} dh dr = - \frac{\mu_0}{4\pi} I dh \int_0^{r_1} \frac{1}{r} dr = 0.$$

Feladat

Határozzuk meg az I árammal átjárt, $d\vec{\ell}$ vezetődarabtól származó indukció fluxusát a tetszőleges alakú alappal rendelkező, a vezetőt csonkakúpszerűen övező test felületére vonatkozóan!

Megoldás

A csonkakúpszerű test alapjaira ugyanaz vonatkozik, mint az előző feladat megoldásában a hengerszerű test esetében. A palást valamely $d\vec{A}$ felületelemére vonatkozóan pedig csak annyi a különbség, hogy $dA = dh|d\vec{r}|\cos\alpha$ helyett $dA = |d\vec{r}|\cos\alpha \frac{dh}{\cos\beta}$ -val kell számolni, ahol β a hengerszerű test megfelelő felületeleméhez tartozó felületvektor és az aktuális felületvektor által bezárt szög:



$$\vec{B}d\vec{A} = \vec{B}dA' \cos\beta = BdA' \cos\beta = B|d\vec{r}|\cos\alpha \cos\beta \frac{dh}{\cos\beta} = B|d\vec{r}|dh \cos\alpha.$$

Összefoglalva

Mivel az előző feladatokban használt felületek elemeiből tetszőleges zárt felület összerakható, általában is teljesül, hogy

$$\oint_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Ezt az összefüggést **IV. Maxwell-törvénynek** nevezzük. Mivel ez az összefüggés nemcsak áramok közvetlen közelében, de általában is teljesül, a II. Maxwell-törvénnyel összevetve úgy is fogalmazhatunk, hogy mágneses indukciót keltő töltések (= **mágneses töltések**) nincsenek, a mágneses mező forrásmentes.

Az áramátjárt vezetőre ható erő

A vezető ℓ hosszúságú szakaszában $nA\ell$ darab elektron van. Az ezekre ható mágneses erő: $nA\ell e\vec{v} \times \vec{B}$. Az ℓ hosszúságú vezető szakaszban mozgó töltések $\vec{j} = ne\vec{v}$ áramsűrűséget hoznak létre. Ebből az I erősségű áramot hordozó töltések sebessége meghatározható: $\vec{j} = ne\vec{v} \Rightarrow I = neA v \Rightarrow v = \frac{I}{neA}$, amiből a vezetőre ható mágneses erőre $\vec{F} = nA\ell e\vec{v} \times \vec{B} = \frac{I}{neA} \ell \times \vec{B} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$ adódik. Ez az ún. **Neumann-törvény**.

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Megjegyzés

A mágneses mező munkája a benne mozgó töltésen mindig 0, mert $\vec{F} \perp \vec{v}$ (a töltés körpályán mozog). Ez azonban nem jelenti azt, hogy a töltéseket tartalmazó vezetőn végzett munkája is nulla lenne: **ponderomotoros erő**.

Feladat

Határozzuk meg egy végtelen hosszú, egyenes vezető mágneses mezője által a vezetőtől r távolságban párhuzamosan futó, azonos irányú árammal átjárt vezető ℓ hosszúságú szakaszára kifejtett erőt!

Megoldás

Ha a végtelen hosszú vezetőben I_1 erősségű áram folyik, a Biot–Savart-törvény szerint maga körül $B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_1$ nagyságú, a vezetőre merőleges indukciót kelt. Ebből következően a másik vezető $\vec{\ell}$ szakaszára a Neumann-törvény szerint $\vec{F} = I_2 \vec{\ell} \times \vec{B}$ erő hat, amely merőleges a vezetőre is és a másik vezető által keltett mágneses indukcióra is, vagyis a másik vezető felé mutat, nagysága pedig, $F = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_1 I_2 \ell$.

Megjegyzés

A töltésfogalom bevezetése kapcsán tett megjegyzésben már utaltunk rá, hogy SI alapegységnek nem a töltést, hanem az áramerősséget választották, s a töltést ezen keresztül mérik: 1 A erősségűnek azt az áramerősséget mondjuk, amely ha két egymástól 1 m távolságban párhuzamosan futó, végtelen hosszúságú vezetőben folyik, akkor az egyik végtelen hosszúságú vezető a másik 1 m hosszúságú darabjára $2 \cdot 10^{-7}$ N nagyságú erőt fejt ki. Ennek az az oka, hogy míg töltés technikailag csak nehézkesen, viszonylag pontatlanul mérhető (akár az elektronok leszámítására alapozott töltésfogalmat használjuk, akár az általunk nem ismertett fenomenológikus töltésfogalmat). Ez a megállapítás elég meglepőnek tűnhet a most ismertett áramerősség-definíció fényében (hiszen hogyan is lehetne technikailag könnyen mérni a végtelen hosszúságú áramvezetők által egymásra kifejtett erőket), de ez alapján a definíció alapján már pontosan lehet számolni olyan véges kiterjedésű tekercsek által egymásra kifejtett erőket, amelyeket nagyon pontosan lehet mérni is. Arról van szó tehát,

hogy bár elvileg tisztább lenne a töltésfogalmat definiálni, és az áramerősséget ennek alapján származtatni (mi az itt bemutatott felépítésben éppen így járunk el), gyakorlatilag azonban pontosabban kivitelezhető, és biztonságosabban reprodukálható az áramokkal kapcsolatos erők mérése, és a töltésmennyiség ezen mérésekre alapozott definíciója.

A mágneses mező által kifejtett forgatónyomaték

Látuk, hogy a mágneses mezőbe helyezett, áramátjárta vezető részeire az adott rész helyzetétől függően erő hathat. A következőkben azt vizsgáljuk, hogy speciális geometriájú vezetőkre ható erők eredményeznek-e forgatónyomatékokat.

Feladat

Határozzuk meg, egy I árammal átjárt, R sugarú, \vec{B} indukciójú mágneses mezőbe helyezett körvezetőre a mágneses mező által kifejtett forgatónyomatékokat!

Megoldás

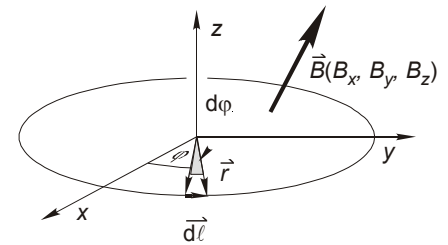
A Neumann-törvény alkalmazásához most is szükségünk van a körvezető érintőjének irányába eső $d\vec{\ell}$ előállítására, amit ugyanúgy végezhetünk el, mint a

körvezetőtől származó mágneses indukció meghatározásakor: $d\vec{\ell} = \frac{r^* d\varphi}{r^*} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi$, ahol x és y az \vec{r} vektor első és második koordinátája. Ennek felhasználásával a $d\vec{\ell}$ vezetődarabra ható erő:

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B} = I \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d\ell_x & d\ell_y & d\ell_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -y & x & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} I d\varphi = \begin{pmatrix} x B_z \\ y B_z \\ -y B_y - x B_x \end{pmatrix} I d\varphi.$$

A $d\vec{\ell}$ vezetődarabra ható erő a körvezető egészére forgatónyomaték-járulékot ad:

$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ dF_x & dF_y & dF_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ x B_z & y B_z & -y B_y - x B_x \end{vmatrix} I d\varphi = \begin{pmatrix} -y^2 B_y - xy B_x \\ xy B_y + x^2 B_x \\ -xy B_z - xy B_z \end{pmatrix} I d\varphi.$$



A vezető keret egészére ható forgatónyomaték a $d\vec{\ell}$ szakaszokra ható járulékok összege: $\vec{M} = \int d\vec{M}$. Kihasnálva, hogy $x = r \cos \varphi$, és $y = r \sin \varphi$ az összegzés a következő integrálok kiszámítását igényli:

$$\vec{M} = \int d\vec{M} = \begin{pmatrix} -\int_0^{2\pi} y^2 B_y d\varphi - \int_0^{2\pi} xy B_x d\varphi \\ \int_0^{2\pi} xy B_y d\varphi + \int_0^{2\pi} x^2 B_x d\varphi \\ \int_0^{2\pi} xy B_z d\varphi - \int_0^{2\pi} xy B_z d\varphi \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} -AB_y \\ AB_x \\ 0 \end{pmatrix} I = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & IA \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & m_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{m} \times \vec{B},$$

ahol kihasználtuk, hogy az integrálokból \vec{B} komponensei \vec{B} homogenitása miatt kiemelhetők, s így az integrálokra a következő értékek adódtak:

$$\int_0^{2\pi} xy d\varphi = \int_0^{2\pi} r^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{r^2}{2} [\sin^2 \varphi]_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} y^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \varphi d\varphi = r^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{r^2}{2} [\varphi]_0^{2\pi} - \frac{r^2}{4} [\sin 2\varphi]_0^{2\pi} = r^2 \pi - (0 - 0) = A,$$

$$\int_0^{2\pi} x^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 \varphi d\varphi = r^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{r^2}{2} [\varphi]_0^{2\pi} + \frac{r^2}{4} [\sin 2\varphi]_0^{2\pi} = r^2 \pi + (0 - 0) = A.$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha más alakú (pl. téglalap, vagy akár tetszőleges) áramhurokra ható forgatónyomatékokat vizsgáljuk, vagyis az

$$\boxed{\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}}$$

eredményt általános érvényűnek tekinthetjük.

Megjegyzés

Látjuk, hogy a körvezető mágneses momentuma az általa keltett mágneses indukció tekintetében éppúgy, mint a külső mágneses mező által rá kifejtett forgatónyomaték vonatkozásában pontosan úgy viselkedik, mint elektrosztatikus dipól az elektromos térerősséggel kapcsolatban. Ez a párhuzam kiterjeszhető a körvezetőre ható erőre és a körvezető helyzetéből fakadó potenciális energiára is:

Az elektrosztatikai és a magnetosztatikai dipól összefoglaló összehasonlítása

	Elektrosztatikai dipól	Magnetosztatikai dipól
megvalósítása	nulla össztöltésű töltésrendszer	áramhurok
A dipólmomentum definíciója	$\vec{d} = \sum_{k=1}^n \vec{a}_k q_k$	$m = AI$, és \vec{m} I -vel jobbsodrású
Az általa keltett mező jellemzője (a dipólmomentum irányában a tőle mért távolság függvényeként)	$\vec{E}(\vec{r}) = 2k \frac{\vec{d}}{r^3}$	$\vec{B}(\vec{r}) = 2 \frac{k}{c^2} \frac{\vec{m}}{r^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{r^3}$
Az általa keltett mező jellemzője (általános helyzetű pontban)	$\vec{E}(\vec{r}) = k \left(3 \frac{(\vec{r}\vec{d})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{d}}{r^3} \right)$	$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{k}{c^2} \left(3 \frac{(\vec{r}\vec{m})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(3 \frac{(\vec{r}\vec{m})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$
A külső mező által rá kifejtett erő	$\vec{F}(\vec{r}) = (\vec{d} \text{ grad}) \vec{E}(\vec{r})$	$\vec{F}(\vec{r}) = (\vec{m} \text{ grad}) \vec{B}(\vec{r})$
A külső mező által rá kifejtett forgatónyomaték	$\vec{M}(\vec{r}, \varphi) = \vec{d} \times \vec{E}(\vec{r})$	$\vec{M}(\vec{r}, \varphi) = \vec{m} \times \vec{B}(\vec{r})$
A dipól helyzetéből fakadó potenciális energiája	$E_{\text{pot}}(\vec{r}, \varphi) = -\vec{d}\vec{E}(\vec{r})$	$E_{\text{pot}}(\vec{r}, \varphi) = -\vec{m}\vec{B}(\vec{r})$

Vektorpotenciál

Az elektrosztatikában találtunk egy olyan skalár-vektor-függvényt (a potenciálfüggvényt), amelyből a térerősség egyszerű formális művelettel (gradiensképzéssel) előállítható: $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}U(\vec{r})$. Az $U(\vec{r})$ skalár-vektor-függvény ponttöltés által keltett mezőre $U(\vec{r}) = k \frac{Q}{r}$, ill. kiterjedt töltésrendszerre (tőle a töltésrendszer méreteihez mérten távol):

$$U(\vec{r}) = k \left(\frac{1}{r} \sum_k Q_k + \frac{1}{r^3} \sum_k Q_k (\vec{d}_k \vec{r}) + \frac{1}{r^5} \sum_k Q_k (\vec{d}_k \vec{r})^2 \right).$$

Lehetne-e vajon $\vec{B}(\vec{r})$ -et is ehhez hasonlóan, egy könnyen előállítható potenciálfüggvényből nyerni? Skalárértékű függvényből biztosan nem, hiszen $\text{rot} \vec{B}(\vec{r}) \neq 0$. Meg lehet azonban próbálni $\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot} \vec{A}(\vec{r})$ alakban, ahol $\vec{A}(\vec{r})$ neve **vektorpotenciál**, SI egysége $[A] = [x][B] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Vs}{m\lambda} = \frac{Vs}{m}$. $\vec{A}(\vec{r})$ (akárcsak $U(\vec{r})$) nincs egyértelműen meghatározva: ha $\gamma(\vec{r})$ tetszőleges skalár-vektor-függvény, $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \text{rot}(\vec{A}(\vec{r}) + \text{grad} \gamma(\vec{r}))$, mert $\text{rot grad} \gamma(\vec{r}) \equiv 0$. Ez azt jelenti, hogy $\vec{A}(\vec{r})$ -re önkényesen kiszabható egy feltétel, pl. hogy legyen $\text{div} \vec{A}(\vec{r}) = 0$. A gerjesztési törvény szerint: $\oint_G \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r} = \mu_0 \int_F \vec{j}(\vec{r}) d\vec{f} \Rightarrow \oint_G \text{rot} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} = \mu_0 \int_F \vec{j}(\vec{r}) d\vec{f} \Rightarrow \int_F \text{rot rot} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{f} = \mu_0 \int_F \vec{j}(\vec{r}) d\vec{f} \Rightarrow \text{rot rot} \vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \text{grad div} \vec{A}(\vec{r}) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$. Felhasználva, hogy $\text{div} \vec{A}(\vec{r}) = 0$,

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

Ez a Poisson-egyenlettel azonos alakú, de három skaláregyenletet jelent, amelynek megoldásai is a Poisson-egyenlet megoldásaival azonos alakúak. Az elektrosztatikus Poisson-egyenlet $\Delta U(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$, amelynek megoldása: $U(\vec{r}) = k \int_V \frac{\rho dV}{r} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dV$. Ennek mintájára az $\vec{A}(\vec{r})$ -re előállított egyenlet megoldását is azonnal felírhatjuk (hiszen matematikai szempontból mindegy, hogy az azonos alakú egyenletben mely betűk testesítik meg a változókat):

$$\left. \begin{aligned} A_x(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j_x}{r} dV \\ A_y(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j_y}{r} dV \\ A_z(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j_z}{r} dV \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}}{r} dV.$$

Feladat

Határozzuk meg egy I erősségű árammal átjárt, dL hosszúságú vezető darabtól származó mágneses indukciót tőle r távolságban!

Megoldás

Első lépésként származtassuk $\vec{B}(\vec{r})$ -t a vektorpotenciálból (ami egyelőre ismeretlen),

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix},$$

majd a vektorpotenciál meghatározása érdekében alkalmazzuk a Poisson-egyenlet megoldására az elektrosztatikai analógia alapján nyert eredményt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{j_z}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{j_y}{r} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{j_x}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{j_z}{r} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{j_y}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{j_x}{r} \right) \end{pmatrix}.$$

Felhasználva, hogy az áramerősség és az áramsűrűség kapcsolata szerint $\vec{j} dV = \vec{j} F d\ell = I \vec{d\ell}$ (ahol F a vezető keresztmetszete), továbbá, hogy $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} x$, és ugyanígy $\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} y$, $\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} z$,

$$\left. \begin{aligned} B_x(\vec{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{r^3} (d\ell_z y - d\ell_y z) \\ B_y(\vec{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{r^3} (d\ell_x z - d\ell_z x) \\ B_z(\vec{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{r^3} (d\ell_y x - d\ell_x y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{r^3} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ d\ell_x & d\ell_y & d\ell_z \end{vmatrix} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{r^3} \vec{r} \times \vec{d\ell} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{r^3} \vec{d\ell} \times \vec{r}.$$

Ez lényegében a Biot-törvény, tehát az így számolt $\vec{B}(\vec{r})$ helyes!

Feladat

Határozzuk meg a végtelen kiterjedésű, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ j \\ 0 \end{pmatrix}$ áramsűrűséggel átjárt síklemeztől származó \vec{B} -t a síktól r távolságban!

Megoldás

Felhasználva a vektorpotenciálra nyert eredményt, továbbá hogy \vec{j} -nek csak az y -komponense különbözik nullától, $A_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{jh d\rho_x d\rho_y}{r}$ (ahol h a síklemez vastagsága, $\vec{\rho}$ pedig a lemez egy felületdarabjától a vizsgált pontba mutató helyvektor, ekkor $\rho = z \tan \alpha$, $d\rho = z \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha$, és $\frac{1}{r} = z \sin \alpha$ (ahol α ρ -nak a z -tengellyel bezárt szöge).

$$A_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{jh d\rho_x d\rho_y}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} jh \int_0^\infty \frac{1}{r} 2\rho \pi d\rho = \frac{2\pi\mu_0}{4\pi} jh \int_0^{\frac{\pi}{2}} z \sin \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{\mu_0}{2} jhz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{\mu_0}{2} jhz \left[\frac{1}{\cos \alpha} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \infty - \frac{\mu_0}{2} jhz.$$

Összefoglalva

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu_0}{2} jhz \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -\frac{\mu_0}{2} jhz & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0 jh}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Látjuk, hogy ha } z > 0 \Rightarrow \vec{B}(z) = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0 jh}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ és ha } z < 0 \Rightarrow \vec{B}(z) = \begin{pmatrix} -\frac{\mu_0 jh}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés

Ugyanezt az eredményt korábban az Ampère-féle gerjesztési törvény alkalmazásával is megkaptuk már, így ez a példa is bizonyítja, hogy a vektorpotenciál eredményesen alkalmazható a vezető rendszertől származó mágneses indukció meghatározására.

Elektromágneses indukció

Feladat

Határozzuk meg egy mágneses mezőben az indukcióra merőleges irányban v nagyságú sebességgel mozgó, ℓ hosszúságú vezetőben kialakuló töltésválasztás következtében létrejövő elektromos térerősség értékét!

Megoldás

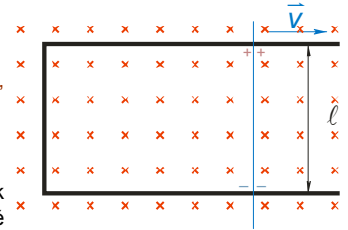
Mivel a vezető belsejében szabadon elmozduló elektronok a vezetővel együtt mozognak, rájuk a Lorentz-törvény szerint $e\vec{v} \times \vec{B}$ erő hat, ami a vezetővel párhuzamos. Ennek eredményeként az elektronok a vezetőhöz viszonyítva elmozdulnak, összegyűlnek a vezető végén. Ez a töltésválasztás mindaddig tart, amíg a töltésmegosztás miatt kialakuló elektromos mező (ami a töltéseket visszarendezni „igyekeznek”) térerőssége miatt az elektronokra ható erő nullává válik: $e\vec{E}_t + e\vec{v} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{E}_t = -\vec{v} \times \vec{B}$. Mivel ez az elektromos térerősség a vezető belsejében mindenütt fennáll (ellenkező esetben az elektronok elmozdulnának), a vezető két vége között $U = E_t \ell = vB\ell$ feszültség alakul ki.

Megjegyzés

A vezetővel együttmozgó vonatkoztatási rendszerben a vezető elektronjai állnak, így rájuk a Lorentz-erő nem hat. Ugyanakkor a töltésválasztás ebből a vonatkoztatási rendszerből nézve is létrejön (hiszen a vezető végére kigyűlő elektronok töltése Lorentz-invariáns), ami csak úgy értelmezhető, hogy a vezetővel együttmozgó vonatkoztatási rendszerből nézve a vezető elektronjaira elektromos erő hat (hiszen csak az elektromos mező fejt ki erőt a nyugvó töltésekre). Ebben a vonatkoztatási rendszerben tehát a nyugvó rendszerből látszó mágneses mező helyett elektromos mezőt észlelünk, amelynek térerőssége: $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$ (a szétválasztott töltések által keltett térerősség -1 -szerese), ahol \vec{B} a nyugvó vonatkoztatási rendszerben észlelhető mágneses indukció értéke. Ez az elektromos térerősség a \vec{v} sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerből nézve akkor is megjelenik, ha maga a vezető jelen sincs. Ismét mondhatjuk tehát, hogy az egyik vonatkoztatási rendszerben elektromos kölcsönhatásnak látszó jelenség a másik vonatkoztatási rendszerben mágneses kölcsönhatásnak látszik.

Feladat

Határozzuk meg az előző feladat szerinti, mozgó vezetőben „észlelt” $\vec{v} \times \vec{B}$ „térerősség” zárt görbére vett integrálját arra, az ábra szerinti téglalpra, amelynek egyik oldaléle a mozgó vezető!



Megoldás

A mozgó vezetőt az ábrán kék színnel rajzoltuk meg. Mivel a téglalap fekete színnel megrajzolt további élei állnak, ezek mentén $\vec{v} \times \vec{B} = 0$, a mozgó vezető szakaszán pedig vB nagyságú (mert \vec{v} és \vec{B} merőlegesek egymásra), az ábrán felfelé mutató vektor. Ha az ábrán az óramutató járásával ellentétes körülféréssel haladunk körbe, akkor a mozgó vezető szakaszán az integrál $vB\ell$, a további szakaszokon pedig nulla. Így $\oint_G \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{r} = vB\ell = \frac{d\Phi_B}{dt}$, ahol figyelembe vettük, hogy az indukciófluxus számolásához

használt felületvektort a körülférés irányhoz igazítva az ábrából kifelé mutatónak kellett választanunk, s ezért az ábrába befelé mutató \vec{B} -vel $\Phi_B = -BA$. Az eredményt összefoglalva mondhatjuk, hogy a Lorentz-erőből származtatott „térerősség” zárt görbe menti integráljára a következő összefüggés teljesül:

$$\oint_G \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

Megjegyzés

A fentebbi megfontolásokból láthatjuk, hogy a $\vec{v} \times \vec{B}$ mennyiség valóban térerősség jellegű, abban az értelemben legalább is, hogy a töltött testre ható erő kifejezésében az arányossági szerepét tölti be (éppen úgy, mint a térerősség). De térerősség abban az értelemben is, hogy a korábbi megjegyzésünk szerint a mozgó vezetővel együtthaladó vonatkoztatási rendszerben éppen ennyi (ekkora és ilyen irányú) elektromos térerősséget kell észlelnünk.

Feladat

Határozzuk meg az előző feladat szerinti vezetőben, a vele együtt mozgó vonatkoztatási rendszerben fellépő elektromos térerősség zárt görbére vett integrálját az előző feladat szerinti zárt görbére!

Megoldás

Szemléljük a jelenséget abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyben a vezető áll. Innen nézve a téglalap bal oldaléle mozog, mégpedig balra, vagyis $-\vec{v}$ sebességgel. Ugyanakkor azt az elektromos térerősséget amely a bal oldalélhez képest nyugvó vonatkoztatási rendszerből látszott (s ami 0 volt) korrigálni kell, mégpedig pont annak az ellentettjével, ami a Lorentz-erőből adódik, vagyis $-\vec{v} \times \vec{B}$ ellentettjével, azaz a vonatkoztatási rendszer megválasztása miatt $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$ elektromos térerősség megjelenésével kell számolnunk. (A még részletesebb indoklást lásd a megjegyzésben!) Így aztán a baloldali oldalél mentén a

töltött testekre nem hat erő, mondhatjuk, hogy ott a „térerősség” nulla, viszont a jobboldali oldalél mentén most is $vB\ell$, de $\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = E\ell = vB\ell = \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$.

A téglalap jobboldali élével együttmozgó vonatkoztatási rendszerben vizsgálva tehát az elektromos térerősségre kaptuk ugyanazt az eredményt mint a baloldali szélével „együttnyugvó” – vagy éppen együttthaladó: csak nézőpont kérdése, hogy melyiket mondjuk – vonatkoztatási rendszerben: $\oint_G \vec{E} d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{A}$.

Megjegyzés

Szokás a két eredmény azonosságát azzal indokolni, hogy az egyik vonatkoztatási rendszerben a téglalap jobb oldaléle mozog jobbra, a másikban pedig a bal oldaléle balra, s mindegyik eset a téglalap felületének növekedését eredményezi, így aztán természetes, hogy az eredmény is ugyanaz. Ez a megfontolás azonban hibás, mert az ismertetett elrendezésben csak a jobb oldalél mentén hozza mozgásba „valami” a töltéseket (az egyik vonatkoztatási rendszerből nézve a Lorentz-erő, a másikkól az elektromos erő). Könnyen beláthatjuk ezt, ha mindkét oldalél helyére egy-egy vezetődarabot képzelünk (amelyek sem egymással, sem mással nincsenek összekötve). Azt természetesnek tartjuk, hogy abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyben az ábrába befelé mutató \vec{B} -t látunk, s amelyben a jobboldali oldalél mozog, a Lorentz-erő a mozgó vezetőben lévő pozitív töltéseket a vezető ábra szerinti felső végére hajítja, tehát a felső vég pozitív, az alsó vég negatív töltésűvé válik. Még természetesebbnek tartjuk, hogy a baloldali oldalél mentén elhelyezett vezetőben ugyanez a szétválás nem történik meg, hiszen az ebből a vonatkoztatási rendszerből nézve nem mozog. Ha pedig ugyanezt a jelenséget abból a vonatkoztatási rendszerből szemléljük, amelyben a baloldali oldalél mozog, a jobboldali pedig áll, a vezetőek végére kigyűlt vagy éppen ki nem gyűlt töltéseket ugyanilyenek kell látnunk, hiszen a töltés Lorentz-invariáns, tehát a töltésszétválás csak a jobb oldalél mentén elhelyezett vezetőben történik meg.

A fenti feladatok megoldásából látjuk, hogy ha a feladatok szerinti zárt görbe mentén vezető van, akkor az abban található töltéseket az egyik vonatkoztatási rendszerből nézve a $\vec{v} \times \vec{B}$ „térerősséget megtestesítő” Lorentz-erő hajítja körbe a vezető mentén – amelyre teljesül a $\oint_G \vec{v} \times \vec{B} d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{A}$ összefüggés –, a másik vonatkoztatási rendszerből nézve pedig az ugyanazon a helyen (= ugyanabban a vezetékszakasban) fellépő örvényes elektromos erő – amelynek térerősségére teljesül a $\oint_G \vec{E} d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{A}$ összefüggés. Ha nem firtatjuk, hogy a töltött testre ható erő $\vec{E}(\vec{r})q$ jellegű-e, vagy inkább $\vec{v} \times \vec{B} q$ jellegű-e – és a fenti megfontolásaink azt mutatják, ennek feszegetése nem is igazán értelmes kérdés – akkor beszélhetünk mindegyik esetben térerősségről, és a vonatkoztatási rendszer megválasztásától függetlenül írhatjuk, hogy

$$\oint_G \vec{E} d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{A} \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

ahol kihasználtuk a felületi és a zárt görbe menti integrálok kapcsolatára vonatkozó Stokes-tételt. Ez **Maxwell III. törvénye**, vagy más néven a **Faraday-Lenz-féle indukciós törvénye**:

$$\oint_G \vec{E} d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{A} \Leftrightarrow \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

A változó elektromos mező által keltett mágneses mező

Láttuk, hogy a változó mágneses mező elektromos örvénymezőt kelt. Maxwell (angol fizikus) arra a következtetésre jutott, hogy az elektromos és mágneses jelenségek azonos töről fakadó természete miatt ennek a jelenségnek fordítva is léteznie kell: azt várta, hogy a változó elektromos mező mágneses örvénymezőt kelt, és az Ampère-féle gerjesztési törvényt kiegészítette az ennek a gondolatnak megfelelő taggal:

$$\oint_G \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 \left(\int_F \vec{j} d\vec{A} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_F \vec{E} d\vec{A} \right).$$

Sokáig keresték az $\varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_F \vec{E} d\vec{A}$ alakú tag létezését, amit végül is az elektromágneses hullámok megtalálása igazolt fényesen (Hertz). A felírt egyenletből kiolvashatjuk, hogy $\varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_F \vec{E} d\vec{A}$ áram jellegű. Sokáig próbálták a szó legszorosabb értelmében annak is tekinteni: a kísérleti elrendezésekben szinte szükségszerűen jelenlévő szigetelőkben fellépő, a változó elektromos mező hatására létrejövő molekuláris szintű töltésselválásokkal próbálták értelmezni. Ennek maradványaként még ma is szokás „**eltolódási áramnak**” nevezni, bár ma már biztosan tudjuk, hogy a jelenség vákuumban is fellép, így semmiféle töltésmozgáshoz nincs köze, és éppen ezért nem is célszerű áramnak nevezni.

Mágneses mező közegben

Láttuk, hogy a különböző anyagú testeket elektromos mezőbe helyezve, töltésszétválás jön létre: az olyan anyagokban, amelyekben a töltések elmozdulhatnak (vezetők), megosztás, azokban pedig, amelyekben az elmozdulás csak atomi méretekben valósulhat meg (szigetelők), polarizáció. Tekintettel arra, hogy mágneses töltések nincsenek ($\oint_F \vec{B} d\vec{A} = 0$), mágneses mezőben megosztás nem jöhet létre. Mágneses polarizáció azonban igen, mert az atomok, molekulák jelentős része maga is rendelkezik mágneses momentummal (**paramágneses anyagok**, amelyeket a külső mágneses mező rendezhet, s így hasonló, de mágneses dipólókból álló dipólláncok alakulhatnak az anyag belsejében, mint az elektromos mezőbe helyezett anyagokban: az anyag belsejében mágneses dipólmomentum-sűrűség értelmezhető: az anyagdarab mágneses momentuma a térfogatával arányos, $d\vec{m} = M dV$. Az M -mel jelölt mágneses dipólmomentum-sűrűséget mágnesezettségnek is nevezzük. SI egysége a definíciójából kiolvashatóan: $[M] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{\text{Am}^2}{\text{m}^3} = \frac{\text{A}}{\text{m}}$. Mivel a mágnesezettséget a külső

mágneses mező hozza létre – ahhoz hasonlóan, mint ahogyan a elektromos dipólmomentum-sűrűséget a külső elektromos mező –, itt is teljesül, hogy a mágnesezettség a külső mező indukciójával arányos: $\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}$. (Az arányossági tényezőbe azért olvastottuk bele μ_0 -t is, hogy a χ_m -mel jelölt **mágneses**

szuszeptibilitás az elektromos szuszeptibilitáshoz hasonlóan jellegtelen mennyiség lehessen.) Mivel a mágneses dipóloktól származó mágneses indukció az elektromos dipóloktól származó elektromos térerősséggel megegyező módon számolható, a továbbiakban az elektromos mező közegbeli tárgyalásánál megismert módon járhatunk el. Bevezetjük a mágneses mező „gerjesztettségére” jellemző mennyiséget: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$, amit **mágneses térerősségnek** neve-

zünk. A mágneses térerősség SI egysége a definíciójából kiolvashatóan megegyezik a mágnesezettség egységével, vagyis $\frac{A}{m}$

Megjegyzés

- A $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ mennyiség mágneses térerősségként történő megnevezése nem mondható szerencsésnek, mert mint a bevezetéséből is láthatjuk, nem a mező által valamire kifejtett erőre jellemző. Bár a szakirodalomban ez a legelterjedtebb megnevezése (ezért használjuk mi is), egyes tankönyvekben felbukkan a **gerjesztés** megnevezés is, ami sokkal találébb, hiszen pl. a szolenoid belsejében a mágneses indukció nagyságára $\mu_0 \frac{NI}{\ell}$ -et kaptunk, így ha a szolenoidban nincs anyag (azaz $\vec{M} = 0$), akkor $H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{NI}{\ell}$, ami sokkal inkább arra jellemző, hogy mi gerjeszti a mágneses mezőt, semmint hogy valamilyen térerősség lenne. Hogy aztán e gerjesztés hatására mekkora mágneses indukció jön létre a szolenoid belsejében, az attól függ, hogy az anyagban e gerjesztés eredményeképpen mekkora mágnesezettség jön létre, vagyis hogy mennyi az anyag mágneses szuszeptibilitása.
- A paramágneses tulajdonság mellett még két további típusos tulajdonságot különböztetünk meg az anyagok mágneses viselkedésének szempontjából:
 - Az ún. **ferromágneses anyagok** tulajdonképpen paramágneses atomokból állnak, vagyis olyanokból, amelyek eleve rendelkeznek mágneses dipólmomentummal, a belőlük készített testek mágneses viselkedése azonban mennyiségileg mégis új minőséget sejtető mértékben tér el a paramágneses anyagok többségének viselkedésétől: mágneses szuszeptibilitásuk nagyságrendekkel nagyobb, mint a közönséges paramágneses anyagoké. Ennek bonyolult kvantumfizikai magyarázata van, amelynek lényege, hogy ezekben az anyagokban a paramágneses atomok külső gerjesztés hiányában is makroszkopikus méretű (néhány ezred-század milliméter) tartományokban – ún. **domén**ekben – rendeződnek, s a külső gerjesztés már csak ezeket a makroszkopikus méretű cellákat rendezi. Ez akár nyolc nagyságrenddel nagyobb(!) mágnesezettség-növekedéssel jár, mint az atomkénti rendezés, mert az atomok azonos irányultságú beállítását a hőmozgás igen hatékonyan zilálja szét. A ferromágneses anyagok legismertebb képviselője a vas (innen is kapta ez a tulajdonság a nevét).
 - Az ún. **diamágneses anyagok** olyan atomokból épülnek fel, amelyeknek mágneses momentuma nulla. A külső mágneses mező megjelenése ezekben elektromos örvényteret kelt, ami olyan, az egyes atomokon belüli kóráramot eredményez, amelynek mágneses momentuma a külső mágneses mező indukciójával ellentétes, így mágneses mezője csökkenti a külső mező indukcióját. Ez az effektus minden anyagban megjelenik, de a már eleve dipólmomentummal rendelkező atomoknál észrevehetően kicsiny hatást eredményez. (Csak a nulla mellett látszik az igen kicsiny is nagyknak.)
- A fentebb elmondottak szerint érthető, hogy a paramágneses anyagok szuszeptibilitása $\sim 10^{-4} - 10^{-6}$ körüli érték, a ferromágneseseké ~ 100 , míg a diamágneseseké $\sim -10^{-6}$. Láthatjuk, hogy számottevő mágnesezettség csak a ferromágneses anyagokban alakul ki, ennek ellenére a para- és a diamágneses anyagoknak is vannak konkrét elektronikai alkalmazásai is, mint pl. a nagyfrekvenciás rezgőkörök finomhangolásában.
- A mágneses térerősséggel kapcsolatban szokás beszélni a mágneses Coulomb-törvényről, ami az elektrosztatikában használatos Coulomb-törvény mintájára azt adná meg, hogy mekkora erőt fejt ki egy mágneses monopólus egy másikra (a monopólusok távolságának függvényében), már tudniillik akkor, ha mágneses monopólusok egyáltalán léteznének. De mert ilyenek nincsenek, a mágneses térerősség ilyen jellegű használata, és vele együtt a mágneses Coulomb-törvény is csak egy üres fikció, ami ugyan bizonyos önkényesen felállított szabályok betartása mellett akár helyes eredményt is adhat, de a mágneses dipólok (ugyanis *csak ilyenek* vannak) által egymásra kifejtett erő és forgatónyomaték logikailag tisztán inkább a dipólokra vonatkozó összefüggés alapján határozható meg.

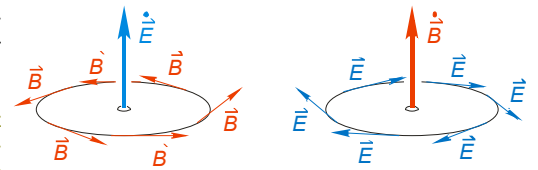
A Maxwell-törvények összefoglalása

Vákuumban		Dielektrikumban (a $\chi_e = 0 \Rightarrow \epsilon_r = 1$ és $\chi_m = 0 \Rightarrow \mu_r = 1$ választással vákuumban is)			
	Integrális alak	Differenciális alak	Integrális alak	Differenciális alak	
I.	$\oint_G \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 \left(\int_F \vec{j} d\vec{A} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_F \vec{E} d\vec{A} \right)$	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$	$\oint_G \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 (1 + \chi_m) \left(\int_F \vec{j} d\vec{A} + (1 + \chi_e) \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_F \vec{E} d\vec{A} \right)$	$\oint_G \vec{H} d\vec{r} = \int_F \vec{j} d\vec{A} + \frac{d}{dt} \int_F \vec{D} d\vec{A}$	$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
II.	$\oint_F \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$	$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$	$\oint_F (1 + \chi_e) \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$	$\oint_F \vec{D} d\vec{A} = \int_V \rho dV$	$\text{div } \vec{D} = \rho$
III.	$\oint_G \vec{E} d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{A}$	$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_G \vec{E} d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{A}$	$\oint_G \vec{E} d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{A}$	$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
IV.	$\oint_F \vec{B} d\vec{A} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$	$\oint_F \vec{B} d\vec{A} = 0$	$\oint_F \vec{B} d\vec{A} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$
Anyagegyenletek	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (\vec{E} + \chi_e \vec{E}) = \underbrace{(1 + \chi_e)}_{\epsilon_r} \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$				
	$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \underbrace{\mu_r \mu_0}_{\mu} \vec{H} = \mu \vec{H}$				
	$\vec{j} = \sigma \vec{E}$				

Megjegyzés

- Az I. és a III. Maxwell-törvényből kiolvashatjuk, hogy elektromos mező változása maga körül mágneses örvénymezőt kelt, mégpedig jobbsodrásút, a mágneses mező változása pedig elektromos örvénymezőt, mégpedig balsodrásút. Olyanok ezek egymáshoz viszonyítva, mintha egymás tükörképei lennének (I. az ábrát).

- Szokás a III. törvényben fellépő mínuszjellet külön törvényként emlegetni (Lenz-törvénye néven), és a III. törvényben való megjelenését azzal értelmezni, hogy a mágneses mező változását az indukáló elektromos mező „akadályozni igyekszik”. Itt azzal a sajátos (máshol is gyakran felbukkanó) logikai hibával állunk szemben, amely a „negatív” szó köznapi értelmét (mint pl. negatív személyiség) próbálja a matematikai kifejezésben felismerni, sőt – ami még nagyobb hiba – magyarázó elvként alkalmazni. Itt valójában arról van szó csupán, hogy a mágneses mező változását (\vec{B} -ot) az indukált elektromos mező (\vec{E}) balsodrással veszi körbe, miközben az egymással összekapcsolt görbementi és felületi integrálok számolásánál a körüljárási irányhoz megállapodás szerint úgy kell megválasztani a felület irányítását, hogy ezek jobbsodrásúak legyenek. A III. törvényben megjelenő mínuszjel ennek a két egyszerű dolognak a matematikai megjelenése. Kissé tréfásan mondhatjuk, hogy ha Gauss balkezes lett volna (és ennek megfelelően a görbementi és felületi integrálok kapcsolatát a körüljárási irány és a felületirányítás balsodrása mellett értelmezte volna), akkor a III. törvényben nem szerepelne mínuszjel (megjelenne viszont az elsőben!). S valóban: a változó elektromos mező által keltett mágneses mező változása is olyan elektromos mezőt indukál, amely az eredeti elektromos mező változásával ellentétes irányú, mégsem szerepel az első törvényben mínuszjel. Igaz viszont, hogy az energiamegmaradás törvényének ellentmondana, ha sem az I. törvényben sem a III. törvényben nem szerepelne mínuszjel, de az semmiképpen sem tekinthető az energiamegmaradás megnyilvánulásának – még csak nem is a természet tulajdonsága –, hogy a mínuszjel éppen a III. törvényben jelenik meg.



Önindukció

Feladat

Határozzuk meg egy szolenoid menetei mentén az $-\oint_G \vec{E} d\vec{r}$ mennyiséget, ha rajta $I(t)$ áram folyik keresztül!

Megoldás

A szolenoid belsejében a mágneses indukció $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I(t)$ nagyságú, és a szolenoid tengelyével párhuzamos. Ezen indukciónak a szolenoidot alkotó körvezetők (= a menetek) mindegyikének felületére vonatkoztatva $\int_F \vec{B} d\vec{A} = \mu_0 \frac{N}{\ell} AI(t)$ fluxusa van, ami $I(t)$ -vel együtt változik. Itt a felület normálisát az áram körüljárási irányához képest jobbsodrásúnak választottuk (ha balsodrásúnak választottuk volna, $\int_F \vec{B} d\vec{A} = -\mu_0 \frac{N}{\ell} AI(t)$ -t kellett volna írunk). A III. Maxwell-

egyenlet szerint a szolenoid egy menete mentén $-\oint_G \vec{E} d\vec{r} = \frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{A} = \mu_0 \frac{N}{\ell} A \frac{dI(t)}{dt}$, ahol a körbejáráskor az árammal egyirányban kell haladnunk (mert csak ez esetben használhatjuk az $\int_F \vec{B} d\vec{A} = \mu_0 \frac{N}{\ell} AI(t)$ összefüggést). A szolenoid menetei mentén haladva azt a felületet, amelyre \vec{B} -nek fluxusa van N -szer járjuk körbe, így a szolenoid menetei mentén $-\int_{G_i} \vec{E} d\vec{r} = N \frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{A} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A \frac{dI(t)}{dt}$, ahol G_i a szolenoid menetei mentén húzódó görbe.

Megjegyzés

- A stacionárius áramokkal átjárt rendszerekben (ahol $\frac{dI(t)}{dt} = 0$) egy zárt hurok mentén $-\oint_G \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} - \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} - \dots = U_1 + U_2 + \dots = 0$ értéket kapunk (Kirchhoff II.). Ha a hurok tekercset is tartalmaz, akkor $-\int_{G_i} \vec{E} d\vec{r}$ a tekercsre eső szakaszon az előbbiek szerint $\mu_0 \frac{N^2}{\ell} A \frac{dI(t)}{dt}$, vagyis úgy számolhatunk, mintha a tekercsen $\mu_0 \frac{N^2}{\ell} A \frac{dI(t)}{dt}$ feszültség esne. Fontos azonban, hogy ez a mennyiség – bár feszültség jellegű – mégsem feszültség, mert értéke nem független attól, hogy az áram irányában haladva milyen pályán jutunk a tekercs egyik végétől a másikig: a tekercs környezetében $\oint_G \vec{E} d\vec{r} \neq 0$, s így feszültséget a tekercs mentén **értelmezni sem lehet!** Ugyanakkor a huroktörvény mégis fenntartható, ha a tekercsen eső feszültség helyett a $\mu_0 \frac{N^2}{\ell} A \frac{dI(t)}{dt}$ értékkel számolunk. Szokás ezt „röviden” (de egyébként az előbbiek szerint helytelenül) úgy mondani, hogy a tekercsben $U = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A \frac{dI(t)}{dt}$ feszültség indukálódik. Helyesebb ilyenkor a feszültségtől való megkülönböztetőség érdekében inkább **indukált elektromotoros erő**ről beszélni. Magát azt a jelenséget, hogy a tekercs menetei mentén haladva a tekercs kapcsai között $\mu_0 \frac{N^2}{\ell} A \left| \frac{dI(t)}{dt} \right|$ abszolútértékű, feszültség jellegű mennyiséget értelmezhetünk, **önindukciónak** nevezzük.
- Látjuk, hogy a tekercsben indukálódó elektromotoros erő a rajta átfolyó áram változási gyorsaságával arányos. Az arányossági tényezőt a tekercs **önindukciós együtthatója** névezzük, és általában L -lel jelöljük: a szolenoid önindukciós együtthatója $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A$. Az önindukciós együttható SI egysége a definíciójából következően: $L = \frac{[U]}{\left[\frac{dI}{dt} \right]} = \frac{V}{\frac{A}{s}} = \frac{Vs}{A} = \Omega s = H$ (henry).
- Az előbbi megfontolásból következik, hogy ha tekercs mentén az árammal ellentétes irányban haladunk, akkor a tekercsre eső szakaszon a $-\int_{G_i} \vec{E} d\vec{r}$ értéket $-\mu_0 \frac{N^2}{\ell} A \frac{dI(t)}{dt}$ szerint számolhatjuk.

Összefoglalva

Mondhatjuk, hogy a tekercsen $|U| = L \left| \frac{dI(t)}{dt} \right|$ abszolútértékű feszültség esik, amit a huroktörvénybe az $U = \pm L \frac{dI(t)}{dt}$ formában kell beírni, aszerint, hogy a tekercsen a hurok menti körüljárás közben az árammal egyirányban (+), vagy ellentétes irányban (–) haladunk át. (Ugyanaz a helyzet, mint az ellenálláson eső feszültség esetében: $U = \pm RI$, aszerint előjelezve, hogy az árammal egyirányban (+), vagy ellentétes irányban (–) haladunk.)

A mágneses mező energiasűrűsége

Feladat

Határozzuk meg, mennyi munkát végez az elektromos mező, miközben egy szolenoid belsejében B nagyságú mágneses indukcióval jellemezhető mágneses mezőt épít fel!

Megoldás

Ha a tekercsre U_0 elektromotoros erejű feszültségforrást kapcsolunk, az elektromos teljesítmény $U_0 I$. Mint láttuk, ahhoz, hogy a szolenoidon U_0 feszültség eshessen, a rajta átfolyó áramnak változnia kell, mégpedig úgy, hogy az $U_0 = L \frac{dI(t)}{dt}$ összefüggés teljesüljön. Ezzel a teljesítmény $LI(t) \frac{dI(t)}{dt}$ alakba írható.

Az elektromos munka a teljesítményből $W = \int_0^{I_0} \underbrace{LI(t)}_{P(t)} \frac{dI(t)}{dt} dt = \int_0^{I_0} LI(t) dI = L \left[\frac{I(t)^2}{2} \right]_0^{I_0} = \frac{1}{2} LI_0^2$.

Láttuk, hogy a szolenoidban folyó I_0 erősségű áram a szolenoid belsejében $B = \mu_0 \frac{NI_0}{\ell}$ nagyságú mágneses indukciót hoz létre. Ebből az elektromos munkát a felépített mágneses mező indukciójával is kifejezhetjük: $I_0 = \frac{B\ell}{\mu_0 N} \Rightarrow W = \frac{1}{2} L \frac{B^2 \ell^2}{\mu_0^2 N^2}$. Felhasználva, hogy a szolenoid önindukciós együtthatója

$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}$, az elektromos munka $W = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \frac{B^2 \ell^2}{\mu_0^2 N^2} = \frac{1}{2} \frac{A\ell}{\mu_0} B^2$. Ahogy a kondenzátort töltő áram a lemezek között kialakuló elektromos mező energiáját növeli, a szolenoidon végzett elektromos munka a benne felépülő mágneses mező energiáját fedezi. Mivel ez a munka arányos a szolenoid térfogatával, könnyen kiolvashatjuk a **mágneses mező energiasűrűségét**:

$$\rho_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B}$$

Elektromágneses hullám vezető mentén

Feladat

Határozzuk meg egy igen széles szalagpár mentén (kondenzátorlemez jellegű elrendezés), milyen sebességgel halad a lemezek töltöttségének állapota, miután a kezdeti pillanatban a szalagpár végére U_0 feszültséget kapcsolunk!

Megoldás

Ha a baloldali lemezre kapcsoljuk a pozitívabb potenciált, a baloldali lemezen pozitív töltések indulnak befelé, amelyek a lemez egyre távolabbi részeit töltik pozitívvá: a baloldali lemezen befelé mutató áram folyik. Ugyanígy tölti a jobboldali lemezt negatívvá a kifelé folyó áram. Abban a térrészben, amelyben a lemezek már töltöttek voltak, az U_0 potenciálkülönbség a kondenzátorjelleg miatt homogén $E = \frac{U_0}{d}$, nagyságú térerősséget hoz létre. A vezetők síklemez jellege miatt a bennük folyó áram ugyancsak homogén, $B = \mu_0 I$ nagyságú mágneses indukciót kelt. Vegyünk fel a már töltött állapot határán (z hely) a lemezek között egy zárt görbét (téglalapot) a lemezekre merőleges síkban, úgy, hogy a határt jelentő oldalal párhuzamos oldala ott legyen, ahová a töltött állapot dt idő múlva érkezik, majd alkalmazzuk Maxwell III. törvényét:

$$\oint_G \vec{E} d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{A} \Rightarrow Eb = -\frac{1}{\Delta t} B b \frac{\Delta z}{v} = Bb \frac{\Delta z}{v} = Bbv \Rightarrow E = Bv,$$

ahol kihasználtuk, hogy a felületnormális az ábra szerinti körülgjárás mellett felfelé mutat, így $\vec{B} \uparrow \downarrow \vec{dA}$, amivel $\vec{B} d\vec{A} = -BdA$, továbbá, hogy az elektromos térerősség a $z + \Delta z$ helyen még nulla, $\oint_G \vec{E} d\vec{r} = Eb$ (mert a lemezekkel párhuzamos oldalak mentén \vec{E} merőleges az oldalra). Vektorkomponensekkel felírva:

$$-E_x = B_y (-v_z) \Rightarrow E_x = B_y v_z.$$

Vegyünk fel egy zárt görbét hasonlóan, de most a lemezekkel párhuzamos síkban, és alkalmazzuk Maxwell I. törvényét:

$$\oint_G \vec{B} d\vec{r} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_F \vec{E} d\vec{f} \Rightarrow Ba = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{\Delta t} Ea \Delta z = \varepsilon_0 \mu_0 Ea \frac{\Delta z}{\Delta t} = \varepsilon_0 \mu_0 Ea v \Rightarrow B = \varepsilon_0 \mu_0 E v.$$

Vektorkomponensekkel felírva:

$$B_y = \varepsilon_0 \mu_0 (-E_x) (-v_z) = \varepsilon_0 \mu_0 E_x v_z$$

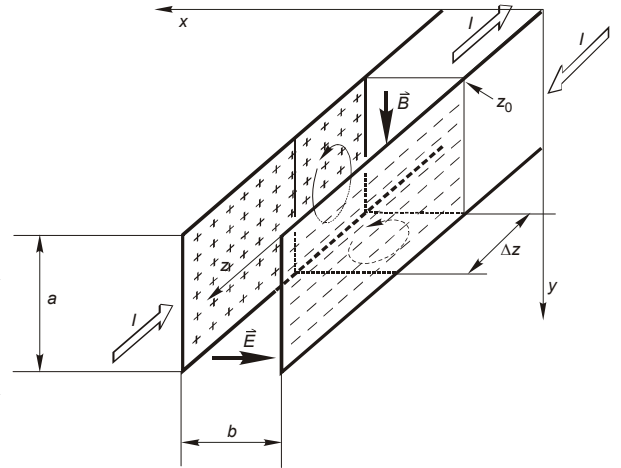
Az E_x -re és a B_y -ra nyert egyenletek egybevetéséből:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= B_y v_z \\ B_y &= \varepsilon_0 \mu_0 E_x v_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_z = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = -v.$$

Ha a hullám visszafelé halad, $-v_z$ helyett mindenütt v_z szerepel, így

$$\left. \begin{aligned} E_{v,x} &= -B_{v,y} v_z \\ B_{v,y} &= -\varepsilon_0 \mu_0 E_{v,x} v_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_z = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = v,$$

vagyis ugyanaz a **terjedési sebesség** adódik.



Energiaáramlás az elektromágneses hullámban

Feladat

Határozzuk meg, mennyi energiát szállít az előző feladat szerint síklemezek között terjedő elektromágneses hullám!

Megoldás

Miközben a lemezeken a töltöttségi állapot a z -tengely mentén egyre távolabb jut, egyre nagyobb térrészben épül fel az az elektromos és mágneses mező, amelynek energiasűrűsége a mágneses indukcióval kifejezve:

$$\rho_{\text{em}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} (\varepsilon_0 \mu_0 E^2 + B^2) = \frac{1}{2\mu_0} \left(\underbrace{B^2}_{\varepsilon_0 \mu_0 v^2} + B^2 \right) = \frac{1}{\mu_0} B^2.$$

Ugyanezt az energiasűrűséget az elektromos térerősséggel is kifejezhetjük:

$$\rho_{\text{em}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} (\varepsilon_0 \mu_0 E^2 + B^2) = \frac{1}{2\mu_0} (\varepsilon_0 \mu_0 E^2 + \varepsilon_0^2 \mu_0^2 v^2 E^2) = \frac{1}{2\mu_0} (\varepsilon_0 \mu_0 E^2 + \varepsilon_0 \mu_0 E^2) = \varepsilon_0 E^2.$$

Összefoglalva

$$\rho_{\text{em}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2.$$

Ennyi az energiasűrűség abban a térrészben, ahová a hullám már eljutott. Ahová még nem jutott el, ott az energiasűrűség 0. Így a vezetőkre merőleges, ab méretű felületen dt idő alatt $w_{\text{em}} v dt$ energia áramlik át, vagyis az **energia-áramsűrűség** (= az a mennyiség, amelynek fluxusa az **energiaáram-erősség**, ami pedig az a mennyiség, amelyet az eltelt idővel megszorozva megkapjuk az adott felületen a szóban forgó idő alatt átáramlott energiát):

$$\vec{S} = \vec{v} \rho_{\text{em}} = \vec{v} \varepsilon_0 E^2 = \frac{\vec{v}}{v \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \varepsilon_0 E^2 = \frac{\vec{v}}{v} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2 = \frac{\vec{v}}{v} \frac{1}{\mu_0} EB.$$

Az energia-áramsűrűség SI egysége a definíciójából következően: $[w] = \frac{[W]}{[F][dt]} = \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}}$.

Kihasználva, hogy $\vec{E} \perp \vec{B}$, továbbá, hogy $\vec{E} \times \vec{B} \uparrow \vec{v}$, \vec{S} egyszerűbben is megadható:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Az \vec{S} -sel jelölt elektromágneses energiaáram-sűrűség vektort **Pointing-vektornak** nevezzük. Valamely felületre vett fluxusa az elektromágneses energiaáram erősségét adja, aminek idő szerinti integrálja a szóban forgó felületen átáramló elektromágneses energiával egyenlő: $W = \int_{t_0}^{t_1} \int_F \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \cdot d\vec{A} dt$.

Lendületáramlás az elektromágneses hullámban

Feladat

Határozzuk meg az előző feladat szerinti vezető lemezpár közé helyezett tökéletes vezetőlapra ($\rho = 0$) ható erőt! (A vezető lap rövidrezárja a lemezeket.)

Megoldás

A tökéletes vezető belsejében $\vec{B} = 0$, mert ha \vec{B} növekedni kezdene, ez elektromos örvénymezőt keltene, ami $\rho = 0$ miatt \vec{E} bármilyen kis értéke mellett tet-szőlegesen nagy áramsűrűséget indíthatna, ami viszont \vec{B} eredeti értékének változásával ellentétes \vec{B} -járulékot hozna létre. Így a lezárást jelentő tökéletes vezetőig $B = \mu_0 \frac{I}{a}$, azon túl pedig $\vec{B} = 0$. A külső forrástól (vezető szalagpár) származó \vec{B} -t a felületi áramoktól származó \vec{B} kompenzálja ki. Ha a felületi áram vonalmenti sűrűsége j_f , akkor az általa hordozott áram erőssége $j_f a$. Az b hosszban futó $j_f a$ nagyságú áramra a mágneses mező a Neumann-törvény szerint $F = \underbrace{j_f a}_{I} b B$ nagyságú erőt fejt ki, ami a lemeznek dt idő alatt $F dt$ nagyságú lendületváltozást okoz. Ezt a lendületet a lemez csak az elektromágneses hullámtól kaphatta, így a lendületmegmaradás törvénye csak úgy tartható fenn, ha ez elektromágneses hullámnak is lendületet tulajdonítunk. Ugyanezen idő alatt az elektromágneses hullám a lemezben $v dt$ mélységig jutott volna (de *nem jutott*, mert a lemezen belül $\vec{E} = 0$ és $\vec{B} = 0$). A lemezben a hullám a dt ideig $A v dt$ térfogatot töltött volna meg, így a mezőben rejlő **lendület sűrűsége**

$$g = \frac{F dt}{A v dt} = \frac{\mu_0}{A v} \frac{B^2}{2} A = \frac{EB}{\mu_0 v} = \frac{S}{v^2}.$$

A lendület vektormennyiség, célszerű ezért a lendületsűrűséghez is irányt rendelni, mégpedig \vec{F} irányát. Mivel $\vec{F} \uparrow \uparrow \vec{v} \uparrow \uparrow \vec{S}$,

$$\vec{g} = \frac{1}{v^2} \vec{S}$$

A lendületsűrűség SI egysége definíciójából következően: $[g] = \left[\frac{1}{v^2} \right] [S] = \frac{s^{\cancel{2}}}{m^2} \frac{J}{m^2 \cancel{s}} = \text{kg} \frac{\cancel{m}^{\cancel{2}}}{s^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{s}}{\cancel{m}^{\cancel{2}}} \frac{1}{m^2} = \frac{\text{kg}}{m^2 s}$.

Az elektromágneses hullám visszaverődése

Jelöljük $E_{b,x}$ -szel a beérkező hullám térerősségének x -komponensét, $E_{v,x}$ a visszaverődő hullám térerősségének x -komponensét. Ezekkel a lezáró ellenálláson eső feszültség: $U = |E_x|b = |E_{b,x} + E_{v,x}|b$. Legyen hasonlóan a $B_{b,y}$ és $B_{v,y}$ a lezárásnál a beérkező ill. a visszaverődő elektromágneses hullám indukciójának y -komponense. A gerjesztési törvényt a lezáráson átfolyó áramra felírva:

$$Ba = \mu_0 I \Rightarrow I = \frac{B_y a}{\mu_0} = \frac{a}{\mu_0} |B_{b,y} + B_{v,y}| = \frac{a}{\mu_0} |E_{b,x} - E_{v,x}| \mu_0 \varepsilon_0 v_z = av \varepsilon_0 |E_{b,x} - E_{v,x}|.$$

A lezáró ellenállásra az Ohm-törvényt felírva:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{|E_{b,x} + E_{v,x}|b}{av \varepsilon_0 |E_{b,x} - E_{v,x}|} = \frac{b \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} |E_{b,x} + E_{v,x}|}{a \varepsilon_0 |E_{b,x} - E_{v,x}|} = \frac{b \sqrt{\mu_0} |E_{b,x} + E_{v,x}|}{a \sqrt{\varepsilon_0} |E_{b,x} - E_{v,x}|}.$$

Bevezetve a $\xi = \frac{E_{v,x}}{E_{b,x}}$ **visszaverődési tényezőt**:

$$R = \frac{b \sqrt{\mu_0} |E_{b,x} + E_{v,x}|}{a \sqrt{\varepsilon_0} |E_{b,x} - E_{v,x}|} = \frac{b \sqrt{\mu_0} \left| \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right|}{a \sqrt{\varepsilon_0} \left| \frac{1 - \xi}{1 - \xi} \right|} = \frac{b \sqrt{\mu_0} |1 + \xi|}{a \sqrt{\varepsilon_0} |1 - \xi|} = R_0 \left| \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right|.$$

Mivel $|E_{v,x}| \leq |E_{b,x}|$, $\left| \frac{E_{v,x}}{E_{b,x}} \right| \leq 1 \Rightarrow |1 + \xi| = 1 + \xi$ és $|1 - \xi| = 1 - \xi$, így $R = R_0 \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \Rightarrow R - R\xi = R_0 - R_0\xi \Rightarrow \xi = \frac{R - R_0}{R + R_0}$, ahol R a vezetékpárt lezáró ellenállás értéke, R_0

pedig a vezetékpár geometriai viszonyaira jellemző – a vezetékpár **hulláminpedenciája** – adat: $R_0 = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$. Mivel $\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ nem függ a vezetékpár adataitól, érté-

ke a vezetékpár geometriai adataitól függetlenül meghatározható: $\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi k}{c^2}} = \sqrt{\frac{16\pi^2 k^2}{c^2}} = 377 \Omega$, a konkrét vezetékpárra vonatkozó adat pedig ennek az

értéknek a $\frac{b}{a}$ aránnyal történi szorzásával nyerhető.

Speciális esetek:

- $R = 0 \Rightarrow \xi = -1 \Rightarrow E_{v,x} = -E_{b,x}$ (a térerősség ellentétes irányúra vált)
- $R \gg R_0 \Rightarrow \xi = 1 \Rightarrow E_{v,x} = -E_{b,x}$ (a térerősség azonos irányú marad)
- $R = R_0 \Rightarrow \xi = 0 \Rightarrow E_{v,x} = 0$ (nincs visszaverődés)

A hullám által szállított energia disszipációja

Feladat

A lemezpár mentén terjedő elektromágneses hullám energiát szállít a lezáráshoz. Határozzuk meg a lezáró ellenállás függvényeként, hogy a hullám által oda-szállított energia hányad része disszipálódik a lezáráson! Határozzuk meg, milyen lezáró ellenállás-érték mellett maximális a rajta disszipálódó energia!

Megoldás

Először kifejezzük a terjedési sebesség nagyságát a hulláminpedenciával: $R_0 = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\mu_0^2}{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{b}{a} \mu_0 v \Rightarrow v = \frac{a R_0}{b \mu_0}$. Ezzel a lezáráshoz érkező hullám által szállított teljesítmény:

$$P_{bc} = Sab = \frac{1}{\mu_0} E_b B_b \quad ab = \frac{B_b^2}{\mu_0} v ab = \frac{B_b^2}{\mu_0} a R_0 \quad ab = \frac{B_b^2}{\mu_0} R_0 a^2.$$

A lezáráson disszipálódott teljesítmény:

$$P_{\text{dissz}} = RI^2 = R \frac{B^2 a^2}{\mu_0^2} = R_0 \frac{1+\xi}{1-\xi} \frac{B^2 a^2}{\mu_0^2} = R_0 \frac{a^2}{\mu_0^2} \frac{1+\xi}{1-\xi} \underbrace{\left(\frac{B_{\text{by}} + B_{\text{vy}}}{B} \right)^2}_{B^2} = R_0 \frac{a^2}{\mu_0^2} \frac{1+\xi}{1-\xi} B_{\text{by}}^2 \left(1 + \frac{B_{\text{vy}}}{B_{\text{by}}} \right)^2 = R_0 \frac{a^2}{\mu_0^2} B_{\text{by}}^2 \frac{1+\xi}{1-\xi} (1-\xi)^2 = R_0 \frac{a^2}{\mu_0^2} B_{\text{by}}^2 (1-\xi^2) = P_{\text{be}} (1-\xi^2).$$

ahol kihasználtuk, hogy $\frac{B_{\text{vy}}}{B_{\text{by}}} = -\xi$, ami az $E_{\text{bx}} = B_{\text{by}} v_z$, $B_{\text{by}} = \epsilon_0 \mu_0 E_{\text{bx}} v_z$ és az $E_{\text{vx}} = -B_{\text{vy}} v_z$, $B_{\text{vy}} = -\epsilon_0 \mu_0 E_{\text{vx}} v_z$ összefüggésekből következnek. A visszaverődési

tényező a lezáró ellenállástól függ: $\xi = \frac{R - R_0}{R + R_0}$, s így

$$P_{\text{dissz}} = P_{\text{be}} (1-\xi^2) = P_{\text{be}} \left(1 - \left(\frac{R - R_0}{R + R_0} \right)^2 \right).$$

A lezáráson disszipálódott energia azon R mellett maximális, amelyre teljesül a $\frac{dP_{\text{dissz}}}{dR} = 0$ feltétel:

$$\frac{dP_{\text{dissz}}}{dR} = -P_{\text{be}} \frac{d\xi^2}{dR} = -P_{\text{be}} \frac{d\xi^2}{d\xi} \frac{d\xi}{dR} = -2P_{\text{be}} \xi \frac{d\xi}{dR} = -2P_{\text{be}} \frac{R - R_0}{R + R_0} \frac{\frac{2R_0}{(R + R_0)^2} dR}{\frac{d\xi}{dR}} = -2P_{\text{be}} \frac{(R - R_0) 2R_0}{(R + R_0)^3} = 0 \Rightarrow R - R_0 = 0 \Rightarrow R = R_0.$$

A beérkező hullám által szállított energia akkor disszipálódik tehát maximális hányadban, amikor a lezáró ellenállás értéke a hullámimpedanciával egyenlő. Ez az ún. **illesztett lezárás**.

Osztott paraméterű hálózat

A gerjesztési törvényből:

$$\oint_G \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 \int_F \vec{j} d\vec{f} \Rightarrow Ba = \mu_0 I \Rightarrow B = \mu_0 \frac{I}{a}.$$

A Gauss-törvényből:

$$\oint_F \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \Rightarrow E = \frac{\eta}{\epsilon_0}.$$

A mágneses energia a kijelölt térfogatban:

$$\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} ab\Delta z = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \mu_0^2 \frac{I^2}{a^2} ab\Delta z = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{b}{a} \Delta z I^2,$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta z} = \mu_0 \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = \mu_0 \frac{b}{a}.$$

Az elektromos energia a kijelölt térfogatban:

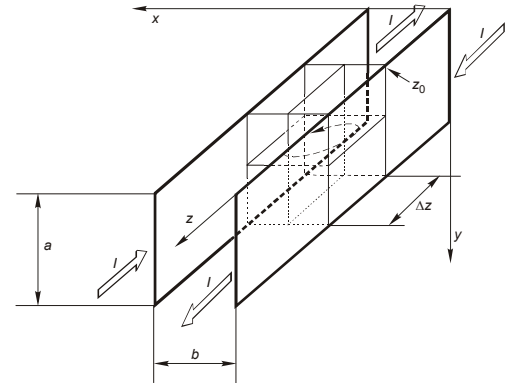
$$\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 ab\Delta z = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\eta^2}{\epsilon_0^2} ab\Delta z = \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2 (\Delta z)^2} ab\Delta z = \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_0 a \Delta z} Q^2,$$

$$\frac{\Delta C}{\Delta z} = \epsilon_0 \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial z} = \epsilon_0 \frac{a}{b}.$$

A G zárt görbére a Faraday–Lenz-törvény: $\oint_G \vec{E} d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{f} = -\int_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{f}$. Az integrálokat részletesen kiírva:

$$-E(z_0)b + \left(E(z_0) + \frac{\partial E}{\partial z} \Big|_{z=z_0} dz \right) b - \frac{\partial R}{\partial z} \Big|_{z=z_0} dz I = -\frac{\partial}{\partial t} B \frac{b dz}{\Delta z},$$

$$\frac{\partial E b}{\partial z} \Big|_{z=z_0} - \frac{\partial R}{\partial z} \Big|_{z=z_0} I = -\frac{\partial}{\partial t} B b = \mu_0 \frac{b}{a} \frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial z} \frac{\partial I}{\partial t},$$



$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial z} I = - \frac{\partial}{\partial t} B \quad b = \mu_0 \frac{b}{a} \frac{\partial I}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial z} \frac{\partial I}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial z} I - \frac{\partial L}{\partial z} \frac{\partial I}{\partial t}.$$

A töltésmegmaradás szerint:

$$\frac{\partial C}{\partial z} dz \frac{\partial U}{\partial t} dt = -I(z) dt + \left(I(z) + \frac{\partial I(z)}{\partial z} dz \right) dt - \frac{\partial G}{\partial z} dz U dt \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial I}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial z} U.$$

Bevezetjük a következő jelöléseket: $\frac{\partial C}{\partial z} = c, \frac{\partial R}{\partial z} = r, \frac{\partial G}{\partial z} = g, \frac{\partial L}{\partial z} = \ell.$

- c neve **vonalmenti kapacitás**: az a mennyiség, amivel a vezetékpár egy szakaszának hosszát megszorozva a vezetékpár szóban forgó szakaszának kapacitását kapjuk. A vonalmenti kapacitás SI egysége definíciójából következően: $[c] = \frac{[C]}{[\Delta z]} = \frac{F}{m};$
- r neve **vonalmenti ellenállás**: az a mennyiség, amivel a vezetékpár egy szakaszának hosszát megszorozva a vezetékpár szóban forgó szakaszának ellenállását kapjuk, SI egysége $r = \frac{[R]}{[\Delta z]} = \frac{\Omega}{m};$
- g a **vonalmenti átvezetés**: az a mennyiség, amivel a vezetékpár egy szakaszának hosszát megszorozva a vezetékpár szóban forgó szakaszának átvezetését kapjuk, SI egysége $r = \frac{[G]}{[\Delta z]} = \frac{S}{m};$
- ℓ a **vonalmenti önindukciós együttható**: amivel a vezetékpár egy szakaszának hosszát megszorozva a vezetékpár szóban forgó szakaszának önindukciós együtthatóját kapjuk, SI egysége $r = \frac{[L]}{[\Delta z]} = \frac{H}{m}.$

Ezzel az indukciós törvényből nyert egyenlet: $\frac{\partial U}{\partial z} = rI - \ell \frac{\partial I}{\partial t}$, a töltésmegmaradásból nyert egyenlet pedig: $c \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial I}{\partial z} - gU \Rightarrow \frac{\partial I}{\partial z} = c \frac{\partial U}{\partial t} + gU.$ Az indukciós

törvényből nyert egyenletet z szerint deriválva, majd $\frac{\partial I}{\partial z}$ imént nyert értékét behelyettesítve:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = r \frac{\partial I}{\partial z} + \ell \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial I}{\partial z} = rc \frac{\partial U}{\partial t} + rgU + \ell c \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \ell g \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Ez az ún. **telegráf-egyenlet**:

$$\frac{\partial^2 U(z,t)}{\partial z^2} = \ell c \frac{\partial^2 U(z,t)}{\partial t^2} + (rc + g\ell) \frac{\partial U(z,t)}{\partial t} + rgU(z,t).$$

Speciálisan, ha $r = 0$ és $g = 0$ (nulla ellenállású vezető és átvezetés nélküli szigetelő a lemezek között), akkor

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \ell c \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

Ez **hullámegyenlet** (= olyan másodrendű differenciálegyenlet, amelynek megoldása $U = f(z \pm vt)$ alakú). Hogy a fenti differenciálegyenletnek bármely, z -től és t -től $f(z \pm vt)$ alakban függő, z és t szerint kétszer deriválható függvény valóban megoldása, arról egyszerű visszahelyettesítéssel közvetlenül meggyőződhetünk:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial(z \pm vt)} \frac{\partial(z \pm vt)}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial(z \pm vt)^2}, \text{ és } \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial(z \pm vt)} \frac{\partial(z \pm vt)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial(z \pm vt)^2}.$$

Ebből az is kiolvasható, hogy $v^2 = \ell c$. Figyelembe véve ℓ és c definícióját: $v = \frac{1}{\sqrt{\ell c}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \frac{b}{a} \epsilon_0 \frac{a}{b}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}.$

Az $U = f(z \pm vt)$ alakú függvényeket **hullámfüggvény**nek hívjuk, mert a függvény argumentumából kiolvashatóan olyan hely és idő szerinti függést ír le, amely valamely helytől Δz -vel jobbra eső helyen $\Delta t = \frac{\Delta z}{v}$ idővel később szolgáltatja ugyanazt az értéket, mint a kiszemelt helyen, a kiszemelt pillanatban, vagyis mondhatjuk, hogy a függvény által leírt állapot v nagyságú sebességgel jobbra halad:

$$z_0 - vt_0 = z_0 + \Delta z - v(t_0 + \Delta t) \Rightarrow \Delta z - v\Delta t = 0 \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta z}{v}.$$

Éppen az ilyen jelenséget szokás **hullám**nak nevezni. Az elmondottakból az is következik, hogy az $U = f(z - vt)$ alakú függvények növekvő z -értékek felé (általában jobbra) haladó hullámot írnak le, míg az $U = f(z + vt)$ alakú függvények csökkenő z -értékek felé (általában balra) haladót.

A v -értékre nyert eredményből látjuk, vákuumban a vezető szalagok között a hullám fénysebességgel terjed. Az itt bemutatott megfontolás értelemszerű módosításával belátható, hogy ha a vezető szalagok közötti teret olyan anyag tölti ki, amelyre $\epsilon_r > 1$, ill. $\mu_r > 1$, akkor a hullám terjedési sebessége kisebb a vákuumban mérhető értéknél:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{v_{\text{vákuum}}}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}},$$

ahol $v_{\text{vákuum}}$ a fény vákuumbeli terjedési sebessége. Például a víz relatív dielektromos állandója $\epsilon_{\text{víz}} \approx 80$, így vízben az elektromágneses hullám (s mint ilyen természetesen a fény is) kb. kilenced része sebességgel terjed, mint vákuumban. Ez olyan nagy különbség, ami kísérleti úton is könnyen ellenőrizhető.

Mint láttuk, az $r = 0$ és $g = 0$ feltételek mellett a vezető szalagpár között csillapítatlan elektromágneses hullám terjedhet. Amikor $r > 0$ vagy $g > 0$ (esetleg mindkettő) teljesül, a hullám csillapodik: energiáját a vezető szalagpár $d\ell$ szakaszán fellépő $r d\ell I^2$ és $g d\ell U^2$ hőfejlődés apasztja.

Megjegyzés

Mint a korábbiakban láttuk, az elektromágneses hullám csak abban a térrészben szállít energiát, ahol $E \neq 0$, és $B \neq 0$, vagyis a lemezpár közötti térrészben. Azt is megvizsgáltuk már, hogy az elektromos hálózatra kapcsolt fogyasztó az elektromágneses hullám által szállított energiát disszipálja el (ill. hasznosítja más úton, pl. villanymotor). Mindebből az az első pillanatra meglepő tény következik, hogy a vezetékek segítségével továbbított elektromos energia *nem a vezetékben*, hanem a vezetékek közötti térrészben vándorol a fogyasztóhoz! Sőt, tekintettel a vezetékre jellemző r mennyiségről elmondottakra, mondhatjuk, hogy a vezetékben a közvetítendő energia helyett éppen a veszteség „terjed” a fogyasztó felé.

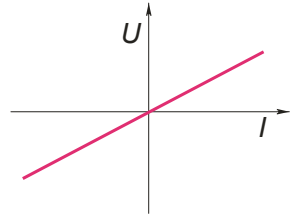
Hálózatok

Kétpólusok

A **kétpólusok** olyan áramköri elemek, amelyek két kivezetéssel csatlakoznak a hálózat további részéhez. Viselkedésüket a két kivezetés között mérhető feszültség, és a kivezetéseken átfolyó áram viszonyát leíró ún. **kétpólus-karakterisztiká**val jellemezzük. A kétpólus-karakterisztikákat képlettel szokás megadni, de sokszor „beszédesebb” lehet az $U - I$ -kapcsolat grafikus megjelenítése.

Ellenállás (általánosabb értelemben)

Olyan kétpólus, amely a rajta végzett elektromos munkát maradéktalanul hővé alakítja (nem tárol energiát): $d'Q = U(t) I(t) dt$ (ahol $d'Q$ a folyamatban a dt idő alatt eldisszipált hő), és a rajta eső feszültség az átfolyó árammal arányos: $U(t) \sim I(t)$. Az arányossági tényezőt **ellenállás**nak nevezzük: $U(t) = RI(t)$. Ezt az összefüggést az **ellenállás karakterisztiká**ként is szemléltethetjük, és tekinthetjük az ellenállás imént adott definíciójával egyenértékű meghatározásának is. Az ellenállás rajzjele:



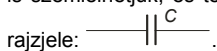
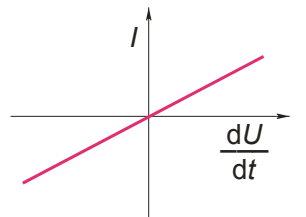
Speciális ellenállásnak tekinthető a **vezeték**, amelyen az elektromos munka mindig nulla, bármekkora áram folyik is át rajta (olyan ellenállás, amelynél $R = 0$). A vezeték rajzjele: _____.

Megjegyzés

Az ellenállás elektromágneses energia szempontjából tisztán veszteséges jellege miatt szokás magát a veszteséges jelleget **rezisztív jelleg**nek is emlegetni. Az ellenállással szemben nem rezisztív jellegű kétpólus a következőkben tárgyalt kondenzátor és tekercs.

Kondenzátor (általánosabb értelemben)

Olyan kétpólus, amely a rajta végzett elektromos munkát „tárolja” (= később visszaalakítható energiafajtvá alakítja), mégpedig úgy, hogy a benne tárolt energia megváltozása arányos a rajta eső feszültséggel és annak megváltozásával: $dE \sim U(t) dU$. Az arányossági tényezőt a kétpólus **kapacitás**ának nevezzük: $dE = CU(t) dU$. A tárolt energia változását az elektromos mező munkája fedezi, így $C \int U(t) dU = \int I(t) dt \Rightarrow I(t) = C \frac{dU(t)}{dt}$. Ezt az összefüggést a **kondenzátor karakterisztiká**ként is szemléltethetjük, és tekinthetjük a kondenzátor imént adott definíciójával egyenértékű meghatározásának is. A kondenzátor rajzjele:



Megjegyzések

- Az elektrosztatikában megismert töltéstároló eszköz (amit ott ugyancsak kondenzátornak nevezünk) megfelel ennek a definíciónak (éppen ezért nevezhetjük mindkettőt kondenzátornak), hiszen az itt definiált kondenzátoron „átáramlott” töltés

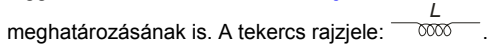
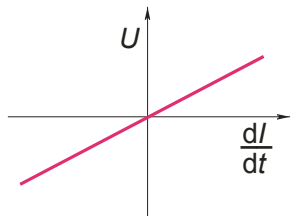
$$Q = \int_0^t I(\tau) d\tau = \int_0^t C \frac{dU(\tau)}{d\tau} d\tau = C \int_0^{U(t)} dU = C [U(\tau)]_0^{U(t)} = CU(t),$$

és az elektrosztatikában éppen ez volt a töltéstároló eszköz kapacitásának a definíciója. Ezek után már természetesnek tekinthetjük, hogy a kondenzátor által tárolt energiára az itt megadott (általánosabb érvényű) definíció szerint is ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az elektrosztatikában a töltéstároló eszköz esetében: $E(t) = \int_0^{U(t)} dE = \int_0^{U(t)} CU(\tau) dU = C \left[\frac{U^2(\tau)}{2} \right]_0^{U(t)} = \frac{1}{2} CU^2(t)$.

- Mivel a kondenzátor energiája a rajta eső feszültség függvénye, s mert a kondenzátor energiája ugrásszerűen nem változhat meg (ahhoz ugyanis végtelel teljesítményre lenne szükség), a kondenzátoron eső feszültség sem változhat ugrásszerűen.

Tekercs (általánosabb értelemben)

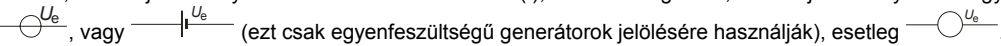
Olyan kétpólus, amely energiát tárolni képes, és a benne tárolt energia megváltozása arányos a rajta átfolyó árammal és annak megváltozásával: $dE \sim I(t) dI$. Az arányossági tényezőt a kétpólus **önindukciós tényező**jének nevezzük: $dE = LI(t) dI$. A tárolt energia változását az elektromos mező munkája fedezi, így $L \int I(t) dI = \int U(t) dt \Rightarrow U(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$. Ezt az összefüggést a **tekercs karakterisztiká**ként is szemléltethetjük, és tekinthetjük a tekercs imént adott definíciójával egyenértékű meghatározásának is. A tekercs rajzjele:

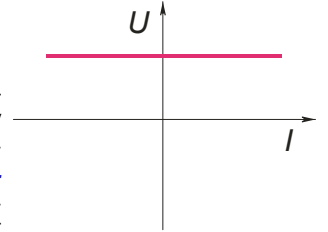


Megjegyzés

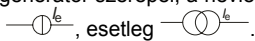
- A magnetosztatikában megismert mágneses energiátároló eszköz (amit ott ugyancsak tekercsnek nevezünk) megfelel ennek a definíciónak (éppen ezért nevezhetjük mindkettőt tekercsnek), hiszen a szolenoid önindukciós együtthatóját éppen az $U(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$ összefüggéssel értelmeztük. Ezek után már természetesnek tekinthetjük, hogy a tekercs által tárolt energiára az itt megadott (általánosabb érvényű) definíció szerint is ugyanazt az eredményt kapjuk, mint a magnetosztatikában: $E(t) = \int_0^t dE = \int_0^{I(t)} LI(\tau) dI = L \left[\frac{I^2(\tau)}{2} \right]_0^{I(t)} = \frac{1}{2} LI^2(t)$.
- Mivel a tekercs energiája a rajta átfolyó áram függvénye, s mert a tekercs energiája ugrásszerűen nem változhat meg (ahhoz ugyanis végtelen teljesítményre lenne szükség), a tekercsen átfolyó áram sem változhat ugrásszerűen.

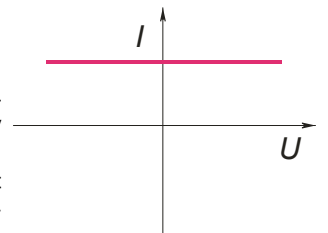
Feszültséggenerátor (feszültségforrás)

Olyan kétpólus, amelyen az elektromos munka arányos a rajta átfolyó árammal és az eltelt idővel: $d'W \sim I(t) dt$. Az arányossági tényezőt a feszültségforrás **elektromotoros erejének** nevezzük: $d'W = U_e I(t) dt$. E definícióból kiolvasható, hogy az U_e -vel jelölt elektromotoros erő feszültségjellegű mennyiség, így SI egysége: volt. A definíció szerint a feszültséggenerátoron eső feszültség független a rajta átfolyó áramtól: $U(t) = U_e(t)$. Ezt az összefüggést a **feszültséggenerátor karakterisztikájaként** is szemléltethetjük, és tekinthetjük a tekercs imént adott definíciójához hasonlóan a feszültséggenerátor egyenértékű meghatározásának is. A feszültséggenerátorhoz általában irányítást is rendelünk (melyet a generátor rajzjele mellett feltüntetett nyílal adunk meg, vagy ezzel egyenértékűen a generátor polaritásának feltüntetésével a rajzjel mellett), mégpedig az általa indított áram irányát, vagyis a generátor negatív pólusától a pozitív pólusa felé mutatót. Ez azt jelenti, hogy a huroktörvény alkalmazásakor generátoron eső feszültséget akkor kell pozitívrá előjelezni, ha a bejelölt irányítással ellentétesen haladunk (!), és akkor negatívra, ha a bejelölt irányítással egyezően haladunk. A feszültséggenerátor rajzjele: 





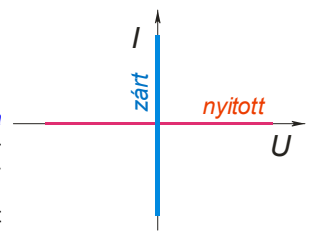
Áramgenerátor (áramforrás)

Olyan kétpólus, amelyen az elektromos munka arányos a rajta eső feszültséggel és az eltelt idővel: $d'W \sim U(t) dt$. Az arányossági tényezőt az áramforrás **névteljes kapocsáramának** nevezzük: $d'W = I_e U(t) dt$. E definícióból kiolvasható, hogy I_e -vel jelölt névteljes kapocsáram áramjellegű mennyiség, így SI egysége: amper. A definíció szerint az áramgenerátoron átfolyó áram független a rajta eső feszültségtől: $I(t) = I_e(t)$. Ezt az összefüggést az **áramgenerátor karakterisztikájaként** is szemléltethetjük, és tekinthetjük az áramgenerátor imént adott definíciójával egyenértékű meghatározásának is. Az áramgenerátorhoz általában irányítást is rendelünk (melyet a generátor rajzjele mellett feltüntetett nyílal adunk meg, vagy ezzel egyenértékűen a generátor polaritásának feltüntetésével a rajzjel mellett), mégpedig az általa generált áram irányát, vagyis a generátor negatív pólusa felől a pozitív pólusa felé mutatót. Ez azt jelenti, hogy a huroktörvény alkalmazásakor generátoron eső feszültséget akkor kell pozitívrá előjelezni, ha a bejelölt irányítással ellentétesen haladunk (!), és akkor negatívra, ha a bejelölt irányítással egyezően haladunk. Mindez azt is jelenti, biztosak lehetünk abban, hogy a hálózatnak abban az ágában, amelyben az áramgenerátor szerepel, a névteljes kapocsáram folyik, és abban is, hogy ez arrafelé folyik, amerre az áramgenerátor irányítása mutat. Az áramgenerátor rajzjele: 



Kapcsoló


Olyan **kétállapotú kétpólus**, amely egyik állapotában egy nulla névteljes kapocsáramú áramgenerátorként működik (ezt a **kapcsoló nyitott** vagy **kikapcsolt állapotának** nevezzük), másik állapotában pedig egy nulla elektromotoros erejű feszültséggenerátorként (ezt a **kapcsoló zárt** vagy **bekapcsolt állapotának** nevezzük). A két állapot közötti átváltáshoz a kapcsolónak valamilyen vezérlő jelre van szüksége. Ez lehet mechanikai jel (mechanikus kapcsoló), de lehet elektromos jel is (pl. feszültség vagy áram), sőt szinte bármilyen egyéb jel is (pl. fény, nyomás, hőmérséklet, stb.). A kapcsoló rajzjele: nyitott kapcsoló: , zárt kapcsoló: .

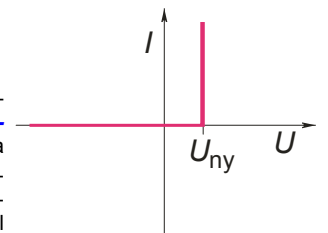


Megjegyzés

A kapcsoló ismertett definíciója szerint a kapcsoló nyitott állapotában nem folyik áram, bármekkora feszültség esik is rajta, a kapcsoló zárt állapotában pedig nem esik rajta feszültség bármekkora is a rajta átfolyó áram. Ez azt jelenti, hogy a kapcsolón az elektromos teljesítmény (és vele együtt a munka is) a kapcsoló mindkét állapotában nulla.

Dióda

Olyan feszültségvezérelt kapcsoló, amely zárt állapotában nem szükségképpen nulla elektromotoros erejű feszültséggenerátort valósít meg. A dióda zárt kapcsolót megvalósító állapotában megjelenő elektromotoros erőt a **dióda nyitófeszültségének** nevezzük. A nyitófeszültség a dióda megvalósításától függő, jellemző adata. Ha a nyitófeszültség nulla, akkor a dióda lényegében egy feszültségvezérelt kapcsolónak is tekinthető. A dióda rajzjele: . A dióda karakterisztika aszimmetriájából következően a diódához is tartozik irányítás, amit azonban nem kell külön megjelölni, mert már a rajzjel is közvetlenül magában hordozza: amikor a diódán a nyitófeszültség esik (vagyis, amikor a dióda vezetési állapotban van), a rajzjelből kiolvasható irányú áram folyik át rajta. A diódának azon elektródáját, amelyen az áram belép, **anód**nak nevezzük, azt az elektródát pedig, amelyen az áram kilép **katódnak**.



Megjegyzés

- A dióda definíciójából következően, ha a diódára a nyitófeszültségnél kisebb feszültséget kapcsolunk, nem folyik rajta áram (ezért lesz nulla a rajta eső teljesítmény). A nyitófeszültségnél nagyobb feszültség a diódán nem eshet.
- Zavaró lehet az a terminológia, miszerint a dióda azon állapotát, amelyben nyitott kapcsolóként viselkedik, a dióda zárt állapotának nevezik, azt pedig, amelyben zárt kapcsolóként viselkedik, a dióda nyitott állapotának. Ez a szóhasználat a szakirodalomban annyira meghonosodott már, hogy a belőle esetlegesen fakadó félreértéseket csak úgy lehet elkerülni, hogy az állapotok megjelölésére teljesen más megnevezéseket használunk. Például a nyitott kapcsolónak megfelelő állapotot azzal jellemezzük, hogy a dióda nem vezet, a zártat pedig azzal, hogy vezet.

A kétpólusok osztályozása

A kétpólus-karakterisztika általában valamely $\Phi(U, I) = 0$ relációval adható meg (ahol U és I pillanatnyi értékek). Egyszerűbb esetekben a $\Phi(U, I) = 0$ implicit függvény $U = \Phi_U(I)$ vagy $I = \Phi_I(U)$ alakra hozható (vagyis U vagy I explicit alakban is kifejezhető), ahol Φ_U és Φ_I nem szükségképpen lineáris (esetleg az időtől is függő) operátor. A kétpólusokat Φ alakjától függően csoportosítjuk. Speciális csoportot képeznek az ún. **források**:

- $U(t) = U_e(t)$: feszültségforrás
- $I(t) = I_e(t)$: áramforrás

További specializálás: $U_e(t) = U_0$ (feszültséggenerátor), és $I_e(t) = I_0$ (áramgenerátor), ezek egyenáramú források, ill. az $U_e(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$ és $I_e(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ típusú források, ezek ún. **periodikus források**.

A kétpólus **rezisztív**, ha Φ_U és Φ_I valós függvénykapcsolatot jelent és nem tartalmaz differenciálást vagy integrálást. Ellenkező esetben a kétpólus **dinamikus**. Így a források rezisztív kétpólusok, az $U(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$ és az $I(t) = C \frac{dU(t)}{dt}$ karakterisztikájú áramköri elem viszont dinamikus.

Lineáris kétpólus

A kétpólust lineárisnak mondjuk, ha a karakterisztika valamely változóját két változóérték lineáris kombinációjaként előállítva a hozzátartozó függvényérték ugyanazon változóértékekhez tartozó függvényértékek ugyanazon lineáris kombinációjaként állítható elő: $\Phi_U(k_1 I_1 + k_2 I_2) = k_1 \Phi_U(I_1) + k_2 \Phi_U(I_2)$, $\Phi_I(k_1 U_1 + k_2 U_2) = k_1 \Phi_I(U_1) + k_2 \Phi_I(U_2)$. Ellenkező esetben a kétpólus **nem lineáris**.

Invariáns kétpólus

Olyan kétpólus, amelynek karakterisztikája invariáns az időbeni eltolással szemben (= a kétpólusnak nincs „előléte”): $\Phi_U(I, t) = \Phi_U(I, t - \tau)$, $\Phi_I(U, t) = \Phi_I(U, t - \tau)$. Ilyenek például az ellenállások, kondenzátorok, tekercsek, nem ilyenek az akkumulátorok és a telepek (ezek elektromotoros ereje, és belsőellenállása is függ a rajtuk korábban átfolyt áram értékétől és fennmaradásuk időtartamától is). Nagyon szigorúan véve az ellenállások sem mindig tekinthetők invariánsnak, hiszen a rajtuk átfolyó áramok melegítik az ellenállásokat, ami viszont megváltoztatja a rajtuk eső feszültség és rajtuk átfolyó áram viszonyát (vagyis a kétpólus karakterisztikáját).

Feszültséggel gerjeszthető kétpólus

A kétpólus karakterisztikája alapján bármely $U(t)$ függvény bármely kis szakaszához egyértelműen tartozik egy $I(t)$ függvény. Ilyen kétpólusok:

- az ellenállás: $I(t) = \frac{U(t)}{R}$ bármely $U(t)$ feszültségfüggés esetén,
- a kondenzátor: $I(t) = C \frac{dU(t)}{dt}$ bármely differenciálható $U(t)$ feszültségfüggés esetén,
- az áramgenerátor: $I(t) = I_e$ (bármely feszültséghez ugyanaz az áram tartozik) az áram a feszültség függvényében konstans,
- a nyitott kapcsoló: $I(t) = 0$ (bármely feszültséghez nulla áram tartozik) az áram a feszültség függvényében konstans,
- a zárt állapotú (nem vezető állapotú) dióda: $I(t) = 0$ (bármely, a nyitófeszültségnél kisebb feszültséghez nulla áram tartozik) az áram a feszültség függvényében konstans.

Ugyanakkor például a tekercs nem gerjeszthető feszültséggel, mert a rajta eső feszültség egy adott pillanat kis környezetében nem határozza meg egyértelműen a rajta átfolyó áramot, és nem gerjeszthető feszültséggel a zárt kapcsoló sem, mert rajta mindig nulla feszültség esik, bármekkora áram folyik is át rajta.

Árammal gerjeszthető kétpólus

A kétpólus karakterisztikája alapján bármely $I(t)$ függvény bármely kis szakaszához egyértelműen tartozik egy $U(t)$ függvény. Ilyen kétpólusok:

- az ellenállás $U(t) = RI(t)$ bármely $I(t)$ áramfüggés esetén,
- a tekercs: $U(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$ bármely differenciálható $I(t)$ áramfüggés esetén,
- a feszültséggenerátor: $U(t) = U_e$ (bármely áramhoz ugyanaz a feszültség tartozik) a feszültség az áram függvényében konstans),
- a zárt kapcsoló $U(t) = 0$, (bármely áramhoz nulla feszültség tartozik) a feszültség az áram függvényében konstans,

– a nyitott állapotú (vezető állapotú) dióda: $U(t) = U_{ny}$ (bármely áramhoz a nyitófeszültség tartozik), a feszültség az áram függvényében konstans.

Ugyanakkor a kondenzátor nem gerjeszthető árammal, mert egy adott pillanat kis környezetében a rajta átfolyó áram nem határozza meg egyértelműen a rajta eső feszültséget, és nem gerjeszthető árammal a nyitott kapcsoló sem, mert rajta mindig nulla áram folyik át, bármekkora feszültség esik is rajta.

Tetszőlegesen gerjeszthető kétpólus

Feszültséggel és árammal is gerjeszthető. A korábbi felsorolásokból kiolvasható, hogy a tárgyalt kétpólusok közül egyedül az ellenállás ilyen tetszőleges feszültség és áram mellett. Egyáltalán nem ilyen a kondenzátor és a tekercs, és csak abban az értelemben ilyenek a kétállapotú kétpólusok (a kapcsoló és a dióda), hogy az egyik állapotukban feszültséggel (de ilyenkor árammal nem), másik állapotukban árammal (de ilyenkor feszültséggel nem) gerjeszthetők.

Kauzális kétpólus

Ha $U(t < t_0) \equiv 0 \Rightarrow I(t < t_0) = \Phi_I(U, t) \equiv 0$, ill. ha $I(t < t_0) \equiv 0 \Rightarrow U(t < t_0) = \Phi_U(I, t) \equiv 0$. Ellenkező esetben a kétpólus **nemkauzális**. A nem kauzális kétpólusnak fizikai értelme nincs, hiszen ez azt jelentené, hogy a kétpólus „előre” megérezné a majdan bekövetkező gerjesztést. A gyakorlatban ezért csak ritkán alkalmazzák, s csak modellként.

Passzív kétpólus

$W(t) = \int_{-\infty}^t U(t')I(t')dt' \geq 0$ ($-\infty < t < \infty$) bármely megengedett gerjesztésre. Ellenkező esetben a kétpólus **aktív**.

Nonenergikus kétpólus

Olyan passzív kétpólus, amelyre $W(t) \equiv 0$ teljesül.

Kétpólusok soros és párhuzamos kapcsolása

Két kétpólust **sorosan kapcsolt**nak mondunk, ha a kapcsolás jellegéből adódóan, szükségképpen azonos áram folyik át rajtuk. Ha a két kétpóluson a kapcsolás jellegéből adódóan, szükségképpen azonos feszültség esik, **párhuzamosan kapcsolt**nak mondjuk őket. Gyakori, hogy két azonos típusú sorosan vagy párhuzamosan kapcsolt kétpólus helyett eredő kétpólusról beszélünk, azaz egyetlen olyan kétpólusról, amely a két eredetit ekvivalens módon helyettesítheti a kapcsolásban (= ugyanazon körülmények között ugyanakkora feszültség esne rajta, és ugyanakkora áram folyna rajta, mint a két kétpóluson együttesen).

Megjegyzés

A definíciókból fakad, hogy az egyetlen áramkörben szereplő két darab kétpólus még akkor sem biztos, hogy vagy sorosan, vagy párhuzamosan lenne kapcsolva, ha van közös pontra csatlakozó kivezetésük (pólusuk). Ugyanakkor előállhat olyan helyzet is, amelyben két kétpólus egyszerre elégíti ki mindkét definíciót. Ilyenkor sincs azonban semmiféle ellentmondás: a kétféle definíció alapján számolt áram és feszültségértékek ilyenkor azonosnak adódnak.

Sorosan kapcsolt ellenállások

A sorosan kapcsolt ellenállások együttesén eső feszültség ekkor a kapcsolás definíciója és az Ohm-törvény szerint:

$$U(t) = R_1 I(t) + R_2 I(t) + \dots + R_n I(t) = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I(t) = RI(t),$$

vagyis a sorosan kapcsolt ellenállások ellenállásának eredője:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Párhuzamosan kapcsolt ellenállások

A párhuzamosan kapcsolt ellenállások együttesén átfolyó áram ekkor a kapcsolás definíciója és az Ohm-törvény szerint:

$$I(t) = \frac{U(t)}{R_1} + \frac{U(t)}{R_2} + \dots + \frac{U(t)}{R_n} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) U(t) = \frac{U(t)}{R},$$

vagyis a párhuzamosan kapcsolt ellenállások ellenállásának eredőjére:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Megjegyzés

Igen gyakran használatos a két párhuzamosan kapcsolt ellenállás eredő ellenállására vonatkozó összefüggés: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Az eredő ellenállás utóbbi alakban történő kifejezését a **két ellenállás replusszá**ként is emlegetik, és $R_1 \oplus R_2$ -vel is (és gyakran $R_1 \times R_2$ -vel is) jelölik.

Sorosan kapcsolt kondenzátorok

A sorosan kapcsolt kondenzátorok együttesen eső feszültség ekkor a kapcsolás definíciója és a kondenzátor definíciója szerint:

$$U(t) = \frac{1}{C_1} \int_0^t I(\tau) d\tau + \frac{1}{C_2} \int_0^t I(\tau) d\tau + \dots + \frac{1}{C_n} \int_0^t I(\tau) d\tau = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) \int_0^t I(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau,$$

vagyis a sorosan kapcsolt kondenzátorok kapacitásának eredőjére:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

Párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok

A párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok együttesen átfolyó áram ekkor a kapcsolás és a kondenzátor definíciója szerint:

$$I(t) = C_1 \frac{dU(t)}{dt} + C_2 \frac{dU(t)}{dt} + \dots + C_n \frac{dU(t)}{dt} = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) \frac{dU(t)}{dt} = C \frac{dU(t)}{dt},$$

vagyis a párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok kapacitásának eredője:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

Sorosan kapcsolt tekercsek

A sorosan kapcsolt tekercsek együttesen eső feszültség ekkor a kapcsolás és a tekercs definíciója szerint:

$$U(t) = L_1 \frac{dI(t)}{dt} + L_2 \frac{dI(t)}{dt} + \dots + L_n \frac{dI(t)}{dt} = (L_1 + L_2 + \dots + L_n) \frac{dI(t)}{dt} = L \frac{dI(t)}{dt},$$

vagyis a sorosan kapcsolt tekercsek önindukciós együtthatójának eredője:

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

Párhuzamosan kapcsolt tekercsek

A párhuzamosan kapcsolt tekercsek együttesen átfolyó áram ekkor a kapcsolás és a tekercs definíciója szerint:

$$I = \frac{1}{L_1} \int_0^t U(\tau) d\tau + \frac{1}{L_2} \int_0^t U(\tau) d\tau + \dots + \frac{1}{L_n} \int_0^t U(\tau) d\tau = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \right) \int_0^t U(\tau) d\tau = \frac{1}{L} \int_0^t U(\tau) d\tau,$$

vagyis a párhuzamosan kapcsolt tekercsek önindukciós együtthatójának eredője:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}$$

Sorosan kapcsolt feszültséggenerátorok

A sorosan kapcsolt feszültséggenerátorok együttesen eső feszültség ekkor a kapcsolás és a feszültséggenerátor definíciója szerint:

$$U(t) = U_{e,1} + U_{e,2} + \dots + U_{e,n} = U_e,$$

vagyis a sorosan kapcsolt feszültséggenerátorok elektromos erejének eredője:

$$U_e = U_{e,1} + U_{e,2} + \dots + U_{e,n}$$

ahol az egyes generátorokon eső feszültségeket előjelesen kell figyelembe venni: Valamelyik (önkényesen választott) generátor elektromotoros erejét pozitív előjellel vesszük figyelembe az összegben, és ezzel megegyezően a vele azonosan irányított generátorok elektromotoros erejének mindegyikét is, negatív előjellel pedig a vele ellentéteseket. Ha ekkor pozitív összeget kapunk, akkor az eredő (helyettesítő) feszültséggenerátor irányítása megegyezik az önkényesen kiválasztott irányítással, ha negatívát, akkor ellentétes vele.

Párhuzamosan kapcsolt feszültséggenerátorok

A kapcsolás definíciója szerint a párhuzamosan kapcsolt feszültséggenerátorok mindegyikén azonos feszültségnek kell esni, ami az $U_{e,1} \neq U_{e,2}, \dots$ esetben ellentmond a feszültséggenerátor definíciójának, ami azt jelenti, hogy ez a kapcsolás **strukturálisan nem reguláris** (= önellentmondást tartalmaz).

Sorosan kapcsolt áramgenerátorok

A kapcsolás definíciója szerint a sorosan kapcsolt áramgenerátorok mindegyikén azonos áramnak kell átfolynia, ami az $I_{e,1} \neq I_{e,2}, \dots$ esetben ellentmond az áramgenerátor definíciójának, ami azt jelenti, ez a kapcsolás **strukturálisan nem reguláris**.

Párhuzamosan kapcsolt áramgenerátorok

A párhuzamosan kapcsolt áramgenerátorokon együttesen átfolyó áram ekkor a kapcsolás definíciója és az áramgenerátor definíciója szerint:

$$I(t) = I_{e,1} + I_{e,2} + \dots + I_{e,n} = I_e,$$

vagyis a párhuzamosan kapcsolt áramgenerátorok áramának eredője:

$$I_e = I_{e,1} + I_{e,2} + \dots + I_{e,n}$$

ahol az egyes generátorok névleges kapacitását előjelesen kell figyelembe venni: Valamelyik (önkéntesen választott) generátor névleges kapacitását pozitív előjellel vesszük figyelembe az összegben, és ezzel megegyezően a vele azonosan irányított generátorok kapacitásmértékét is, negatív előjellel pedig a vele ellentéteseket. Ha ekkor pozitív összeget kapunk, akkor az eredő (helyettesítő) áramgenerátor irányítása megegyezik az önkényesen kiválasztott irányítással, ha negatívát, akkor ellentétes vele.

Sorosan kapcsolt kapcsolók

Nyilvánvaló, hogy ez a kapcsolás csak akkor vezet, ha mindkét kapcsoló be van kapcsolva. Ha a vezetési állapotot logikai 1 állapotnak tekintjük, a nem vezetést pedig logikai nullának, akkor ez a kapcsolás logikai **ÉS** kapcsolatot valósít meg:

K_A	K_B	K_A és K_B sorbakötve
nem vezet	nem vezet	nem vezet
nem vezet	vezet	nem vezet
vezet	nem vezet	nem vezet
vezet	vezet	vezet

A	B	A ÉS B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Párhuzamosan kapcsolt kapcsolók

Nyilvánvaló, hogy ez a kapcsolás csak akkor nem vezet, ha mindkét kapcsoló kikapcsolt állapotban van. Ha a vezetési állapotot logikai 1 állapotnak tekintjük, a nem vezetést pedig logikai nullának, akkor ez a kapcsolás logikai **VAGY** kapcsolatot valósít meg:

K_A	K_B	K_A és K_B párhuzamosan kötve
nem vezet	nem vezet	nem vezet
nem vezet	vezet	vezet
vezet	nem vezet	vezet
vezet	vezet	vezet

A	B	A VAGY B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Megjegyzés

A logikai áramkörökben a logikai változóknak általában nem áramértékeket, hanem feszültség szinteket feleltetnek meg, és ezek között valósítják meg alkalmas kapcsolás kialakításával a kívánt logikai műveletet. Sem a sorosan, sem a párhuzamosan kapcsolt kapcsolókhoz nem értelmezhető két független bemenet, így velük nem szokás logikai hálózatot kialakítani.

Sorosan kapcsolt diódák

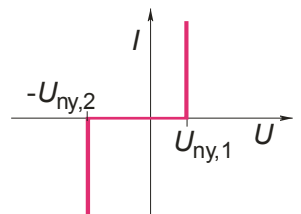
Ha a diódákat azonos irányítással kapcsoljuk össze, akkor mindaddig, amíg a diódákon eső feszültségek összege nem éri el a két dióda nyitófeszültségének összegét, valamelyik dióda bizonyosan lezárt (= nem vezető) állapotban van, így a két sorosan kapcsolt dióda szakadást képvisel. Növelve a két dióda együttesen eső feszültséget, a két nyitófeszültség összegének elérésekor, mindkét dióda feszültséggenerátorként kezd működni (vagyis vezetési állapotba kerül), így a rájuk eső feszültség tovább már nem növelhető. Összességében ez azt jelenti, hogy a két sorosan kapcsolt dióda olyan dióda-ként viselkedik, amelynek nyitófeszültsége a két dióda nyitófeszültség összege.

Ha a diódákat ellentétes irányítással kapcsoljuk sorba, akkor a karakterisztikákból kiolvashatóan valamelyikük a rájuk kapcsolt feszültség bármely értékénél lezárt (nem vezető) állapotban van. Ilyenkor tehát a sorbakapcsolt diódák szakadással helyettesíthetők.

Párhuzamosan kapcsolt diódák

Ha a diódákat azonos irányítással kapcsoljuk össze, akkor a rájuk kapcsolt feszültséget növelve értelemszerűen az a dióda nyit ki először (az kezd vezetni), amelyeknek a nyitófeszültsége kisebb. Innentől kezdve a diódákon eső feszültség tovább nem növelhető, mert a nyitott dióda feszültséggenerátorként működik. Mindez összefoglalva azt jelenti, hogy a két párhuzamosan kapcsolt dióda is dióda-ként működik, amelynek a nyitófeszültsége a két dióda nyitófeszültsége közül a kisebbel egyenlő.

Ha a diódákat ellentétes irányítással kapcsoljuk össze, akkor a rájuk kapcsolt feszültség növelésekor az egyik dióda mindvégig lezárva marad, a másik azonban a nyitófeszültségének elérésekor vezetni kezd. Ugyanez történik a másik diódával a rájuk kapcsolt feszültség csökkentésekor (mert ekkor ez áll nyitóirányban). Összességében az áramkör szakadésként viselkedik, ha a rájuk kapcsolt feszültség abszolútértéke mindkét dióda nyitófeszültségénél kisebb, és alkalmas irányítású feszültséggenerátorként működik, ha rájuk kapcsolt feszültség eléri a megfelelő dióda nyitófeszültségét. A megrajzolt karakterisztikából kiolvashatóan ez a viselkedés nem azonosítható egyetlen kétpólus viselkedésével sem.



Ideális karakterisztikájú kétpólusok soros és párhuzamos kapcsolásának, helyettesítésének összefoglalása

Kétpólus	Soros kapcsolás	Párhuzamos kapcsolás
Ellenállás	$R = \sum_{k=1}^n R_k$	$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$
Kondenzátor	$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$	$C = \sum_{k=1}^n C_k$
Tekercs	$L = \sum_{k=1}^n L_k$	$\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}$
Feszültséggenerátor	$U_e = \sum_{k=1}^n U_{e,k}$	nem reguláris
Áramgenerátor	nem reguláris	$I_e = \sum_{k=1}^n I_{e,k}$
Kapcsoló	nem helyettesíthető egyetlen kétpólussal: csak akkor vezet, ha mindkettő be van kapcsolva (= logikai ÉS kapcsolat)	nem helyettesíthető egyetlen kétpólussal: csak akkor nem vezet, ha egyik sincs bekapcsolva (= logikai VAGY kapcsolat)
Dióda	azonos irányban bekötve: egyetlen ugyanilyen irányú dióddal helyettesíthető amelyre $U_{ny} = U_{ny,1} + U_{ny,2}$	azonos irányban bekötve: egyetlen ugyanilyen irányú dióddal helyettesíthető, amelyre $U_{ny} = \min\{U_{ny,1}, U_{ny,2}\}$
	ellentétes irányban bekötve: szakadással helyettesíthető	nem helyettesíthető egyetlen kétpólussal

Hárompólus (ohmikus kétpólusok csillag- és deltakapcsolása)

Feladat

Határozzuk meg, hogy az ábra szerinti hárompólusok (delta- és csillagkapcsolás) az elemek milyen értékei mellett működnek azonos módon!

Megoldás

Tekintsük a csillagkapcsolást! A csomóponti törvény az 1-es csomópontra:

$$-I_1 + I_{12} + I_{13} = 0 \Rightarrow I_1 = I_{12} + I_{13} = \overbrace{G_{12}(U_2 - U_1)}^{I_{12}} + \overbrace{G_{13}(U_3 - U_1)}^{I_{13}},$$

és hasonlóan a 2-es és 3-as csomópontra:

$$-I_2 - I_{12} - I_{23} = 0 \Rightarrow I_2 = -I_{12} - I_{23} = \overbrace{G_{12}(U_1 - U_2)}^{-I_{12}} + \overbrace{G_{23}(U_3 - U_2)}^{-I_{23}},$$

$$-I_3 - I_{13} + I_{23} = 0 \Rightarrow I_3 = -I_{13} + I_{23} = \overbrace{G_{13}(U_1 - U_3)}^{-I_{13}} + \overbrace{G_{23}(U_2 - U_3)}^{I_{23}}.$$

A három áram összege

$$I_1 + I_2 + I_3 = (-G_{12} - G_{13} + G_{12} + G_{13})U_1 + (G_{12} - G_{12} - G_{23} + G_{23})U_2 + (G_{13} + G_{23} - G_{13} - G_{23})U_3 = 0,$$

így ez lehet akár egy csomópontba befolyó áramok összege is. Ha e csomópont potenciálja U_0 , a hozzáfutó ágak vezetése pedig rendre G_1, G_2, G_3 , akkor

$$I_1 = G_{12}(U_2 - U_1) + G_{13}(U_3 - U_1) = G_1(U_0 - U_1), \quad I_2 = G_{12}(U_1 - U_2) + G_{23}(U_3 - U_2) = G_2(U_0 - U_2), \quad I_3 = G_{13}(U_1 - U_3) + G_{23}(U_2 - U_3) = G_3(U_0 - U_3).$$

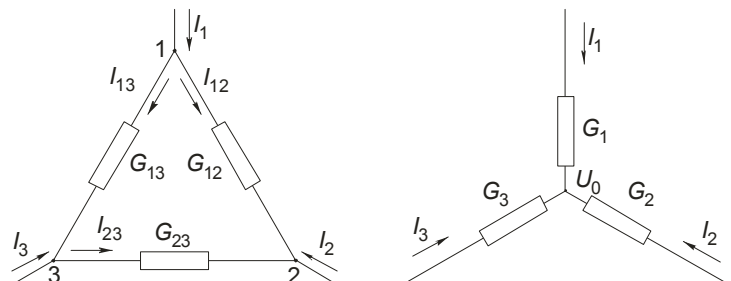
G_1, G_2, G_3 -mal is felírva, hogy $I_1 + I_2 + I_3 = 0$, $G_1(U_0 - U_1) + G_2(U_0 - U_2) + G_3(U_0 - U_3) = 0$, ahonnan

$$U_0 = \frac{G_1 U_1 + G_2 U_2 + G_3 U_3}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

I_1 kifejezésébe U_0 értékét beírva:

$$-(G_{12} + G_{13})U_1 + G_{12}U_2 + G_{13}U_3 = G_1 \frac{G_1 U_1 + G_2 U_2 + G_3 U_3}{G_1 + G_2 + G_3} - G_1 U_1.$$

Innen U_1, U_2 és U_3 együtthatóinak egyenlőségéből:



$$G_{12} + G_{13} = G_1 - \frac{G_1^2}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \quad \text{és} \quad G_{13} = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

G_{23} meghatározásához I_2 kifejezésébe U_0 értékét beírva:

$$G_{12}U_1 - (G_{12} + G_{23})U_2 + G_{23}U_3 = G_2 \frac{G_1U_1 + G_2U_2 + G_3U_3}{G_1 + G_2 + G_3} - G_2U_2.$$

U_1, U_2 és U_3 együtthatóinak egyenlőségéből:

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad G_{12} + G_{23} = G_2 - \frac{G_2^2}{G_1 + G_2 + G_3} \quad \text{és} \quad G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Összefoglalva

$$G_{jk} = \frac{G_j G_k}{G_1 + G_2 + G_3}$$

A delta-csillag-átalakításhoz a fenti három ismeretlent tartalmazó egyenletrendszert G_j -re (ill. a belőle származtatható R_j -re) kell megoldanunk. Ehhez először mindháromból kifejezzük $G_1 + G_2 + G_3$ -t,

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \Rightarrow G_1 + G_2 + G_3 = \frac{G_1 G_2}{G_{12}}$$

$$G_{13} = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \Rightarrow G_1 + G_2 + G_3 = \frac{G_1 G_3}{G_{13}}$$

$$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \Rightarrow G_1 + G_2 + G_3 = \frac{G_2 G_3}{G_{23}} \Rightarrow G_{23}G_1 + G_{23}G_2 + G_{23}G_3 = G_2 G_3,$$

majd az így nyert egyenletekből meghatározzuk G_1 és G_2 összefüggését G_3 -mal:

$$\frac{G_1 G_2}{G_{12}} = \frac{G_1 G_3}{G_{13}} \Rightarrow G_2 = \frac{G_{12}}{G_{13}} G_3,$$

$$\frac{G_1 G_2}{G_{12}} = \frac{G_2 G_3}{G_{23}} \Rightarrow G_1 = \frac{G_{12}}{G_{23}} G_3.$$

Ezeket a harmadik egyenlet másodsorra kifejezett alakjába beírva:

$$\underbrace{G_{23} \frac{G_{12}}{G_{23} G_1}}_{G_{23} G_1} + \underbrace{G_{23} \frac{G_{12}}{G_{13}} G_3}_{G_{23} G_2} + G_{23} G_3 - G_2 G_3 = 0 \Rightarrow G_2 = G_{12} + G_{23} \frac{G_{12}}{G_{13}} + G_{23} = \frac{G_{12} G_{13} + G_{12} G_{23} + G_{13} G_{23}}{G_{13}}.$$

A vezetések helyett az ellenállásokat behelyettesítve:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{12} R_{13}} + \frac{1}{R_{12} R_{23}} + \frac{1}{R_{13} R_{23}} \Rightarrow R_2 = \frac{\frac{1}{R_{13}} R_{12} R_{13} R_{23}}{\left(\frac{1}{R_{12} R_{13}} + \frac{1}{R_{12} R_{23}} + \frac{1}{R_{13} R_{23}} \right) R_{12} R_{13} R_{23}} = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{23} + R_{13} + R_{12}}.$$

Hasonlóan:

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{13}}{R_{23} + R_{13} + R_{12}}, \quad \text{és} \quad R_3 = \frac{R_{13} R_{23}}{R_{23} + R_{13} + R_{12}}.$$

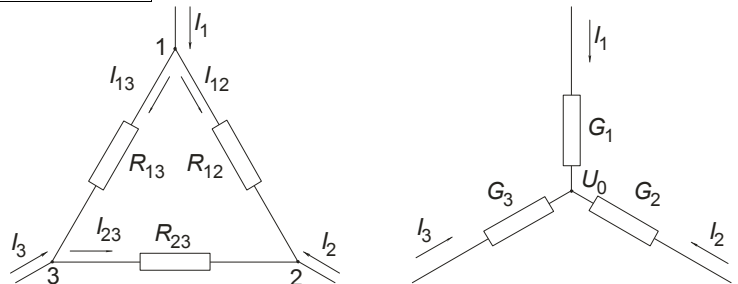
Összefoglalva

$$R_j = \frac{R_{jk} R_{kj}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

Megjegyzés

Szokás a csillag-delta átalakításra vonatkozó összefüggéseket sokkal „egyszerűbb” úton is levezetni: A delta-kapcsolásban az 1-es és 2-es pontok között részben az R_{12} ellenálláson keresztül, részben a „sorbakötött” $R_{13} - R_{23}$ ellenállásokon keresztül folyik áram, a csillag-kapcsolásban ugyanezen pontok között a „sorbakötött” $R_1 - R_2$ ellenállásokon keresztül. A két kapcsolás akkor lehet ekvivalens, ha

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12} (R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}.$$



Hasonlóan

$$R_1 + R_3 = \frac{R_{13}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \text{ és } R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}.$$

Az első két egyenletet összeadva, majd az összegből a harmadikat kivonva:

$$2R_1 + \cancel{(R_2 + R_3)} - \cancel{(R_2 + R_3)} = \frac{R_{12}(R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} + \frac{R_{13}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} - \frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} = \frac{2R_{12}R_{13} + \cancel{R_{23}(R_{12} + R_{13})} - \cancel{R_{23}(R_{12} + R_{13})}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}.$$

Hasonlóan

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, \text{ és } R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}.$$

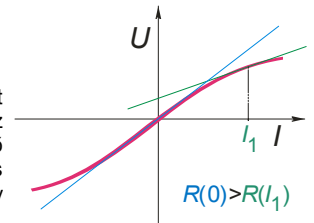
Ez a meg gondolás azonban már a kiinduló pontban hibás, hiszen R_{12} és R_{23} csak akkor tekinthető két sorbakapcsolt ellenállásnak, ha $I_2 = 0$, vagyis amikor valójában nem is delta-kapcsolásról van szó, és hasonlóan az R_1 és R_3 ellenállások sem tekinthetők sorbakapcsolt ellenállásoknak csak akkor, ha $I_2 = 0$, vagyis ha nem csillag-kapcsolásról van szó! Ezeket a hibákat a fentebb bemutatott meg gondolás még kétszer tartalmazza, vagyis összesen hat hibás részmozgaton keresztül jut a helyes eredményhez. Más olyan esetekben, amikor egy három fokszerű csomópontba befutó két ellenállást sorbakapcsoltnak tekintünk, általában hibás eredményt nyerünk. Az egyébként helyes végeredmény önmagában *nem igazolja* az eljárás helyességét, hiszen pl. $2 \cdot 2 = 4$, mégsem szerencsés a számok szorzását összeadással helyettesíteni, bár $2 + 2 = 4$ is helyes! Pedig mennyivel „egyszerűbb” lenne...

A kétpólusok gyakorlati megvalósítása

Bár a kétpólusok definíciói idealizált tulajdonságokat tartalmaznak, viszonylag széles határok között igen jó közelítéssel megvalósíthatók a gyakorlatban is. A következőkben az idealizált tulajdonságoktól való eltérésekkel foglalkozunk.

Ellenállás

Az ellenállás definíciója lényegében a fémek vezetők állandó hőmérsékleten történő áramvezetésére talált Ohm-törvényt emeli a definíció rangjára, amikor az ellenálláson eső feszültség és a rajta átfolyó áram arányosságát kívánja meg. Ez az arányosság azonban széles áramtartományban már fémek vezetőkire sem teljesül, pl. az áramvezetés közben eldisszipált hő okozta hőmérsékletemelkedés miatt sem. A feszültség-áram-karakterisztika kisebb-nagyobb szakasza azonban ilyenkor is lineárisnak tekinthető, ilyenkor is beszélhetünk tehát ellenállásról, de a viszonylag távol eső ellenállás-tartományokban az így értelmezett ellenállás, más és más, vagyis az ellenállás áramfüggő: $R(I_0) = \frac{dU}{dI} \Big|_{I=I_0}$.



Eltérést okozhat az ideális viselkedéstől pl. az is, hogy (különösen a nagy áramok átbocsátására tervezett ellenállásokat gyakran készítenek huzalból, amelynek hosszát úgy növelik az előállítandó ellenállás által megkívánt értékre, hogy a huzalt felcsévélik. Az így elkészített „ellenállás” viszonylag szerény menetszámú szolenoidnak is tekinthető, s mint ilyen energiatárolására is képes, vagyis az ellenállás gyorsan változó áramok esetén számottevő önindukciós együtthatóval is rendelkezik. Ezt az effektust egy az ideálisnak gondolt ellenállással sorosan kapcsolt, ugyancsak ideálisnak tekintett tekercsrel szokás figyelembe venni, vagyis az ellenállás karakterisztikáját két ideális kétpólus karakterisztikájából állítjuk össze.

A viszonylag nagy áramokra tervezett ellenállások kivételével az ellenállásokat általában valamilyen szigetelő testre (többnyire kerámia rudacsára vagy lapocsárá) felvitt vezető réteggel (régebben szénréteg, napjainkban fémréteg) valósítják meg, és a réteg anyagának és vastagságának megválasztásával állítják be a megvalósítani kívánt ellenállásértéket.


Az ellenállások elméleti szempontból kevésbé jelentős, a gyakorlatban azonban rendkívül fontos jellemzője a **terhelhetőség** (= maximális teljesítménye). Többféle teljesítményszorozat van forgalomban, melyek közül a leggyakoribbak: 0,01 W, 0,1 W, 0,25 W, 0,5 W, 1 W. A terhelhetőség egyértelműen meghatározza az ellenállás geometriai méreteit: a nagyobb terhelhetőséghez nagyobb geometriai méretek tartoznak. Az azonos terhelhetőségű ellenállásokat a könnyebb tervezhetőség érdekében azonos geometriai méretekben készítik. További, a gyakorlat szempontjából jellemző adat a **tűrés**, ami arra jellemző adat, hogy a sorozatban gyártott alkatrészek jellemző adata hány százalékban különbözhet a névleges értéktől. Jellemző tűrés sorozatok: 0,1 %, 1 %, 5 %, 10 %.

Kondenzátor

A kondenzátorok gyakorlati megvalósítása többnyire a síkkondenzátor elrendezést igyekszik megvalósítani, azzal a különbséggel, hogy a lemezek felületét a kívánatos kapacitás elérése érdekében igyekeznek minél nagyobbra készíteni. Ez a kívánalom azonban ellentmond a kicsiny térfogatban való megvalósíthatóságnak, ami általában ugyancsak követelmény. Itt is jelenthet megoldást a felcsévélés, amikor is a kondenzátor lemezeket igen vékony fémzalagokból készítik, amelyek közé ugyancsak igen vékony szigetelő szalagot tesznek, majd az így elkészített „szendvicset” csévélik fel. Ez is hasonló eredményre vezet, mint az ellenállások esetében: itt ugyan nem maga az energiatárolás ténye okozza az ideálistól való eltérést (hiszen maga a kondenzátor is energiatároló), hanem az, hogy a tárolt energia megváltozását a kondenzátoron „átfolyó” áram megváltozása is kiváltja, vagyis, hogy a kondenzátor önindukciós együtthatóval is rendelkezik. Ugyanez a probléma akkor is fellép, ha a felület növelését más „geometriai trükkkel” oldják meg, pl. egymásba simuló igen sokszögű csillagfelületekkel. Ezt az effektust egy az ideálisnak gondolt kondenzátorral sorosan kapcsolt, ugyancsak ideálisnak tekintett tekercsrel szokás figyelembe venni.

Eltérést okozhat az ideális viselkedéstől az is, hogy a lemezek között elhelyezett szigetelő ellenállása nem végtelen nagy, vagyis a kondenzátor **átvezetéssel** rendelkezik. Ez azt eredményezi, hogy a kondenzátorban tárolt energia egy része eldisszipálódik, s így többé nem alakítható vissza maradéktalanul elektromos munkává. Ezt az effektust egy az ideálisnak gondolt kondenzátorral párhuzamosan kapcsolt, ugyancsak ideálisnak tekintett ellenállással szokás figyelembe venni, vagyis a kondenzátor karakterisztikáját két ideális kétpólus karakterisztikájából állítjuk össze.

A kondenzátorok elméleti szempontból kevésbé jelentős, a gyakorlatban azonban rendkívül fontos jellemzője az a maximális feszültség, amelyet a kondenzátorra kapcsolva a fegyverzetek közötti szigetelő réteg még biztonságosan szigetelőként viselkedik. Ez az érték nagy mértékben függ a szigetelő anyag megválasztásától és vastagságától. A leggyakrabban alkalmazott szigetelő anyagok: papír, polietilén fólia, valamilyen fémoxid. Ez utóbbit magában a kondenzátorban hozzák létre elektrolyízissal általában csupán néhány molekula vastagságban, hogy a kapacitás a fegyverzetek kicsiny távolsága miatt elegendően nagy

legyen. Ilyenkor ahhoz, hogy az elektrolízis folyamata létrejöhessen, az egyik fegyverzetnek magát az elektrolitot választják, a másiknak egy olyan fémből készített tönköt vagy lemezt, amelynek oxidja biztosítja a szigetelő réteget (a fémoxidok általában nagyon jó szigetelők). Ezzel a technológiával viszonylag kis geometriai méretekben nagy kapacitások érhetők el: pl. egy tipikus szabványértékű 470 μF -os kondenzátor akár $0,5 \text{ cm}^3$ -nél kisebb térfogatban is. Összehasonlításképpen megemlíthetjük, hogy a Földnek mint gömbkondenzátornak a kapacitása ennek az értéknek nem egészen kétszerese (709 μF)! Az elektrolitot tartalmazó kondenzátorok hátránya, hogy viszonylag gyorsan „öregszenek”: az elektrolit a gondos lezárás ellenére kiszárad, ami a gyakorlat szempontjából a kondenzátor kapacitásának jelentős csökkenésében nyilvánul meg. További hátrány, hogy az **elektrolit-kondenzátorok** átvezetése nagyobb, mint az egyéb-technológiákkal készítették. Az elektrolit-kondenzátorok általában polaritásérzékenyek: csak olyan polaritással kapcsolható rájuk feszültség, ami nem indít be jelentős gázfejlődéssel járó elektrolízist: ellenkező esetben a kondenzátorban a nyomás olymértékben megnőhet, ami a kondenzátor felrobbanásához vezet. Az üzemszerű működés szempontjából kívánatos polaritást a kondenzátor rajzjelében is megjelenítik, hogy a kapcsolási rajzról leolvasható legyen. Az elektrolit-kondenzátor rajzjele: .

Kiseb mértékű kapacitásnövelés érhető el azonos térfogatban a fémoxidok helyett szilikátok szigetelőként való alkalmazásával, de az így készített (ún. **keramikuskondenzátorok**) kapacitása igen erősen függ a hőmérséklettől (oly mértékben, hogy a velük készített kondenzátorok akár hőmérsékletmérésre alkalmasak). Viszonylag kis méretük és polaritásérzékeltenségük miatt mégis elterjedten alkalmazzák őket olyan helyeken, ahol a kapacitás pontos értékének nincs jelentősége (pl. gyors elektronikus áramkörök tápfeszültségén megjelenő tranziensek szűrésére, de semmi esetre sem rezgőkörökben).

Megjegyzés

- A kondenzátor definíciójánál tett megjegyzés – miszerint a kondenzátor ugrásfeszültséggel nem gerjeszthető – a gyakorlatban azt jelenti, hogy amikor ugrásfeszültséget próbálunk egy kondenzátorra kényszeríteni (pl. töltetlen állapotban egy konstans elektromotoros erejű feszültségforrásra kapcsoljuk), akkor a kondenzátor **rövidzárként viselkedik**, vagyis igen nagy áramot vesz ki a tápforrásból, olyan nagyot, ami mellett az egyébként jól használható idealizációk már nem alkalmazhatók (pl. a feszültségforrás már nem tekinthető konstans kapocsfeszültségűnek, vagy a kondenzátorhoz kapcsolt vezeték ellenállása már nem tekinthető nullának). Gyakori ezért, hogy a nem kellően védett elektronikus tápegységet egy nagy kapacitású kondenzátor rákapcsolása tönkreteszti. Hasonló jelenség lép fel, amikor a feltöltött kondenzátort nulla ellenállású vezetékkel rövidre zárva próbáljuk meg kisütni. Ilyenkor is olyan nagy áramok indulhatnak meg, amelyek akár meg is olvaszthatják a vezetőket, vagy akár a kondenzátor lemezeit (az áram ezek egy részfelületén is átfolyik). E jelenség gyakorlati alkalmazásaként szokás a viszonylag hosszú idő alatt (kis árammal) feltöltött kondenzátor kisütésével ponthegeszteni.
- A kondenzátor előbbi megjegyzésben ismertetett viselkedését megfogalmazhatjuk úgy is, hogy a kondenzátor a rákapcsolt feszültség gyors változásával szemben **feszültséggenerátorként viselkedik** (amelynek elektromotoros ereje a kondenzátor éppen fennálló feszültsége), mégpedig annál inkább, minél gyorsabb a változás. Ennek a tulajdonságnak igen elterjedt alkalmazása, amikor a kondenzátort „rövid távú” feszültségstabilizátorként használjuk, megakadályozva ezzel egy feszültség gyors ingadozásait (pl. tápegységek **szűrőkondenzátora**).

Tekercs

A tekercseket általában kicsiny fajlagos ellenállással rendelkező fémhuzalból (többnyire rézből) készítik a szolenoid-geometriát alapul véve. Mivel a fémhuzalban folyó áram a huzalt melegíti, a tekercsbe betáplált elektromos munka már nem alakítható vissza maradéktalanul elektromos munkává. Ezt az effektust egy az ideálisnak gondolt tekercssel sorosan kapcsolt, ugyancsak ideálisnak tekintett ellenállással szokás figyelembe venni, vagyis a tekercs karakterisztikáját két ideális kétpólus karakterisztikájából állítjuk össze.

Ugyanazon gerjesztőáram mellett jelentősen növelhető a tekercsben uralkodó mágneses indukció (és ezen keresztül az önindukciós együttható is) azzal, hogy a tekercs belsejét nagy relatív permeabilitású anyaggal töltik ki (**vasmag**). A vas átmágneseződése közben azonban a vasban olyan folyamatok zajlanak, amelyek energiát disszipálnak, így az ebből fakadó veszteséget is az ideális tekercssel sorbakapcsolt ellenállással szokás figyelembe venni. A vasmagban keletkező veszteség döntő részben abból származik, hogy a változó gerjesztő áram által életre hívott változó mágneses indukció elektromos örvényteret kelt, amely a viszonylag jó vezetőképességű vasban áramot indít (**örvényáram**). Az örvényáramok által termelt Joule-hőt a tekercsbe betáplált (a tárolásra szánt) energia fedezi, így az energiátárolás szempontjából ez veszteségként jelentkezik. Ez a veszteség csökkenthető azzal, hogy a vasmagot egymástól elektromosan elszigetelt kis tartományokra bontjuk, mert így adott mágnesesindukció-változás mellett a $\oint_G \vec{E} d\vec{r}$ mennyiség annyiszor kisebbé válik, mint

ahányszor kisebbé válik a geometriai méret csökkenése miatt a G zárt görbe hossza. Ugyanennyiszor kisebb a vasanyag által képviselt ellenállás is a görbe mentén (így az örvényáramok erősségét az elszigetelt cellákra bontás végülis nem változtatja meg!), de az $I_0 \oint_G \vec{E} d\vec{r}$ formában számolható elektromos teljesít-

mény annyira részre csökken, mint ahányad része az elszigetelt cella lineáris mérete a teljes vasmag lineáris méretének. A tekercs különböző alkalmazási területeinek megfelelően más-más technológiát alkalmaznak a vasmag egymástól elektromosan elszigetelt cellákra bontásához: az energiátovábbításra használt elektromos hálózatokban alkalmazott transzformátorok vasmagjait pl. vékony lemezekből készítik, amelyek közé vékony papírból szigetelő réteget helyeznek, vagy a lemezeket szigetelő lakkréteggel vonják be. Mivel az indukált elektromos örvényező télerőssége annál nagyobb, minél gyorsabban változik a mágneses indukció, a nagyfrekvenciás technikában alkalmazott tekercsek vasmagjait még apróbb tartományokra bontással készítik: az igen apró vasszemcséket megolvasztott szigetelő anyagba keverik, majd az így keletkezett masszát lehűtve megszilárdítják (**porvasmag**).

A tekercsek elméleti szempontból kevésbé jelentős, a gyakorlatban azonban rendkívül fontos jellemzője az a maximális áram, amely mellett a tekercsben található huzal még nem melegszik olyan mértékben, ami a tekercs károsodásához vezetne.

Megjegyzés

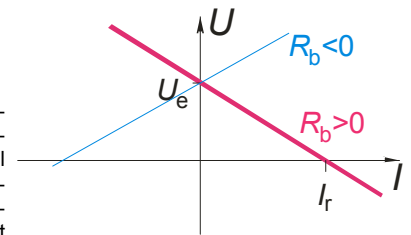
- Erősítők felhasználásával viszonylag könnyen megvalósítható olyan kapcsolás is, amely energiátárolóként kondenzátort használ, de a kétpóluson eső feszültséget és a rajta átfolyó áramot úgy „transzformálja” (lényegében felcseréli őket egymással), hogy annak viselkedése a tekercsével megegyező legyen (**girátor**). Mivel a kondenzátorok fajlagos energiavesztése $\left(\frac{\text{energiavesztés}}{\text{tárolt energia}} \right)$ általában kisebb, mint a tekercseké, a girátorokkal megvalósított tekercsek közelebb állnak az ideálishoz, mint a rézhuzalból készített szolenoidok.
- A tekercs definíciójánál tett megjegyzés – miszerint a tekercs ugrásárammal nem gerjeszthető – a gyakorlatban azt jelenti, hogy amikor ugrásáramot próbálunk egy tekercsre kényszeríteni (pl. egy konstans áramú áramforrásra kapcsoljuk), akkor a tekercs **szakadásként viselkedik**, vagyis igen nagy feszültséget kényszerít a tápforrásra, olyan nagyot, ami mellett az egyébként jól használható idealizációk már nem alkalmazhatók (pl. az áramforrás már

nem tekinthető konstans kapocsáramúnak, vagy a tekercshez kapcsolt vezeték már nem tekinthető egymástól elszigeteltnek). Ugyanez a jelenség lép fel akkor is, amikor az áramátjárta tekercs áramát megszakítjuk. Ilyenkor is olyan nagy feszültség indukálódik a tekercsben, amely mellett a megszakítás már nem tekinthető többé megszakításnak (pl. szikra üt át a megszakított vezeték között). E jelenség gyakorlati alkalmazására a régebbi gyártású gépkocsimotor gyújtóáramkörének működése szolgált igen elterjedt példát, amelynek lényege, hogy egy tekercsen átfolyó áram mechanikus megszakításakor olyan nagy feszültség keletkezik, ami elegendő egy erre a célra létrehozott szikraközön (gyújtógyertya) átugró szikra létrehozásához (ez robbantja be alkalmas pillanatban a motor hengerébe beszívott a benzín-levegő-keveréket).

- A tekercs előbbi megjegyzésben ismertetett viselkedését megfogalmazhatjuk úgy is, hogy a tekercs a rajta átfolyó áram gyors változásával szemben **áramgenerátorként viselkedik** (amelynek névleges kapocsárama a tekercsen éppen átfolyó áram), mégpedig annál inkább, minél gyorsabb a változás. Ennek a tulajdonságnak igen elterjedt alkalmazása, amikor a tekercset „rövid távú” áramstabilizátorként alkalmazzuk, megakadályozva ezzel egy áram gyors ingadozásait (pl. a nagyfrekvenciás áramkomponensek kijutását egy rezgőkör tápvezetékein – **fojtótekercs**).
- A gépkocsik gyújtóáramköre a fentiek szerint a tekercs áramgenerátor jellegű működésén alapul. Ugyanakkor a kondenzátor feszültséggenerátorként való működése is alkalmazást nyer ugyanebben az áramkörben, ugyanis míg a gyújtógyertya szikraközén átugró szikra nélkül a motor üzemképtelen, addig a mechanikus megszakítást végző érintkezőknél fellépő szikra a megszakító felületének korrodeálásához vezet, ami megakadályozza a megfelelő újabb kontaktus létrejöttét, s ezzel üzemképtelenné teszi az egész motort (sokszor már néhány száz méter megtétele után). Ezért a megszakító érintkezők között kialakuló szikra megakadályozására ún. **szikraoltó kondenzátor** kötnek a megszakító érintkezőivel párhuzamosan, ami a feszültségstabilizáló jelleg révén akadályozza meg, hogy a megszakító érintkezői között a feszültség oly mértékben megnövekedjen, ami szikra kialakulásához vezethetne.
- Csak érdekességképpen említjük meg, hogy a korszerű gépkocsik motorjának gyújtóáramköre is egy tekercs áramának megszakításával állítja elő a gyújtószikrát, de a megszakítást nem mechanikus érintkező, hanem félvezető áramkör látja el, de itt is szükség van a megszakító áramköri elem fellépő feszültségugrás korlátozására, mert a félvezetőn belüli átütés a félvezetőt tönkreteszi. Ráadásul a mechanikus érintkezővel szemben (aminek korrozíójához csak sok-sok szikra egymásutánja vezet) a félvezető már egyetlen átütést követően is üzemképtelenné válik.
- A tekercs áramának megszakításakor fellépő feszültségugrás (**induktív lökés**) a gyakorlatban **kikapcsolási jelenség**ként ismert. Szokás **bekapcsolási jelenségről** is beszélni, ez azonban nem a kikapcsolási jelenség fordítottja, mert a gyakorlatban igen ritka, hogy egy áramgenerátorral sorbakötött tekercsre az áramgenerátor ugrásáramot próbálna kényszeríteni (a konstans áramú áramgenerátorra pedig üzem közben rákapcsolni a tekercset nem lehet, ti. amíg nincs rákapcsolva a tekercs, az áramgenerátornak nincs min kereszülhajtania a konstans áramot, így az nem is működhet üzemszerűen). A gyakorlatban a tekercs áramkörbe iktatása valamilyen feszültség rákapcsolását jelenti, ami értelemszerűen nem vált ki induktív lökést. Ugyanakkor azonban az áramgenerátor-jelleg ilyenkor is megmutatkozik, ti. abban, hogy a rákapcsolt feszültség a tekercsen azonnal megjelenik, de az áram ebben a pillanatban még nulla marad, éppen csak időben lineárisan növekedni kezd – ugyanis az ilyen jellegű változás biztosítja a tekercsen az állandó feszültséget. Ez a bekapcsolási jelenség lényege.

Feszültséggenerátor

A feszültséggenerátorok gyakorlati megvalósítására sokféle megoldás létezik (kémiai energiaátalakulást kihasználó telepek, akkumulátorok; mechanikai energiát elektromossá alakító, az indukció jelenségét felhasználó generátorok; elektromos energiát úgy szabályzó áramkörök, hogy azok működése az ideális feszültséggenerátorhoz minél inkább hasonlítson: tápegységek), abban azonban megegyeznek, hogy a rajtuk átfolyó áram kisebb-nagyobb mértékben befolyásolja a kapcsaik között eső feszültséget, mégpedig általában úgy, hogy a növekvő áram a kapocsfeszültséget csökkenti. A csökkenés mértéke a gyakorlati megvalósítások zömében lineárisnak tekinthető, s ezért gondolkozhatunk úgy, mintha a gyakorlatban megvalósított feszültségforrás egy ideális feszültséggenerátor és egy ugyancsak ideálisnak tekintett ellenállás sorbakapcsolásából állna: $U_k = U_e - R_b I$, ahol U_k a feszültségforrás kapcsain tényleges feszültség (**kapocsfeszültség**nek hívjuk), U_e a feszültségforrásba képzelt ideális feszültséggenerátor **elektromotoros ereje** (= a felírt összefüggésből kiolvashatóan a terheletlen feszültségforrás kapocsfeszültsége), R_b a növekvő terhelő árammal arányosan csökkenő kapocsfeszültség csökkenésében fellépő arányossági tényező (mivel a felírt összefüggésből kiolvashatóan ellenállás jellegű, **belsőellenállás**nak hívjuk), I pedig a feszültségforrásban átfolyó (terhelő) áram. Ilyenkor a gyakorlatban megvalósuló **feszültséggenerátor karakterisztikáját** két ideális kétpólus karakterisztikájából állítjuk össze, amit **Thèvenin-féle helyettesítés**nek nevezünk. Kiolvasható belőle, hogy a terheletlen feszültségforrás feszültsége az elektromotoros erővel egyenlő, továbbá, hogy a feszültségforrásból kivehető maximális áram erőssége (az ún. **rövidzárási áram**) $I_r = \frac{U_e}{R_b}$ (ekkor a áram mellett ugyanis a kapocsfeszültség már nullává válik). A Thèvenin-féle helyettesítő kép magára az ideális feszültséggenerátorra is vonatkoztatható az $R_b = 0$ választással. A gyakorlatban mindazon feszültségforrásokat feszültséggenerátornak tekintjük, amelyekre teljesül az $R_b \ll R_k$ viszony, ahol R_k a külső terhelések ellenállását jelöli.

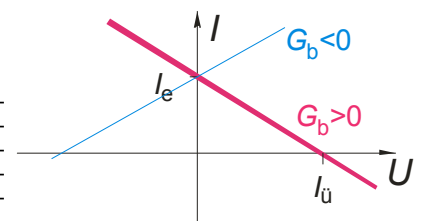


Megjegyzés

- Van olyan feszültségforrás is, amelynek kapocsfeszültsége növekvő terheléssel nem csökken, hanem növekszik. Ilyenkor is fenntartható azonban a Thèvenin-féle helyettesítő kép, ha a belsőellenállást negatívnak tekintjük. Gyakran ilyenre „sikerülnek” az elektronikus megvalósított feszültséggenerátorok (stabilizált tápegységek).
- Nem minden feszültséggenerátor viseli el károsodás nélkül, hogy ellenkező irányú áram folyjon át rajta, mint amelyet ő maga indítana (a karakterisztikán az $I < 0$, $U > U_e$ tartomány). Hasonlóan, azt sem minden feszültséggenerátor „tűri”, hogy a saját elektromotoros erejével ellentétes polaritású feszültség essen rajta (a karakterisztikán az $U < 0$, $I > I_r$ tartomány). Különösen érzékenyek ebből a szempontból az elektronikus megvalósított feszültséggenerátorok (tápegységek).

Áramgenerátor

A gyakorlatban az áramgenerátorok ritkábban fordulnak elő, mint a feszültséggenerátorok, megvalósításuk általában valamilyen elektronikus úton történik. Abban hasonlítanak az így létrehozott áramgenerátorok a feszültséggenerátorokra, hogy a rajtuk átfolyó áram nem független a kapcsaikon mérhető feszültségtől, hanem növekvő feszültséggel általában csökken. Ha ez a csökkenés lineárisnak tekinthető, gondolkozhatunk úgy, mintha a gyakorlatban megvalósított áramforrás egy ideális áramgenerátorból és egy ugyancsak ideálisnak tekintett, vele párhuzamos



zamosan kapcsolt ellenállásból állna: $I = I_e - G_b U$, ahol I az áramforrás kapcsain ténylegesen átfolyó áram (**kapocsáramnak** hívjuk), I_e az áramforrásba képzelt ideális áramgenerátor árama, az ún. **névleges kapocsáram** (a felírt összefüggésből kiolvashatóan a nulla kapocsfeszültséghez tartozó kapocsáram, amit ezért **rövidzársi áramnak** is neveznek), G_b a növekvő kapocsfeszültséggel arányosan csökkenő kapocsáram csökkenésében fellépő arányossági tényező (mivel a felírt összefüggésből kiolvashatóan vezetési jellegű, **belső vezetésnek** hívjuk), U pedig az áramforráson eső kapocsfeszültség. Ilyenkor a gyakorlatban megvalósuló **áramgenerátor karakterisztikáját** két ideális kétpólus karakterisztikájából állítjuk össze, amit **Norton-féle helyettesítésnek** nevezünk. Kiolvasható belőle, hogy a nulla kapocsfeszültségű áramforrás árama az ideális áramgenerátor áramával egyenlő, továbbá, hogy az áramforrás maximális kapocsfeszültsége (az ún. **üresjársi feszültség**) $U_{\text{ü}} = \frac{I_e}{G_b}$ (ekkor a feszültség mellett ugyanis a kapocsáram már nullává válik). A Norton-féle helyettesítő kép

magára az ideális áramgenerátorra is vonatkoztatható a $G_b = 0$ választással. A gyakorlatban mindazon áramforrásokat áramgenerátornak tekintjük, amelyekre teljesül a $G_b \ll G_k$ viszony, ahol G_k a külső terhelések vezetését jelöli. Ugyanezt a feltételt ellenállásokkal is megfogalmazhatjuk: $R_b \gg R_k$. Ez az alapja, az áramgenerátor legegyszerűbb megvalósításának is: minden olyan feszültségforrás áramgenerátornak tekinthető, amelynek a belső ellenállása sokkal nagyobb, mint a terhelések ellenállása.

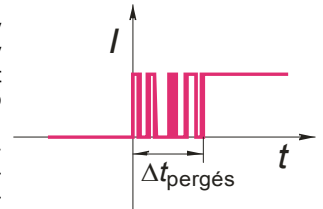
Megjegyzés

- Van olyan áramforrás is, amelynek kapocsárama növekvő terheléssel nem csökken, hanem növekszik. Ilyenkor is fenntartható azonban a Norton-féle helyettesítő kép, ha a belső vezetést negatívnak tekintjük.
- Nem minden áramgenerátor viseli el károsodás nélkül, hogy ellenkező polaritású feszültség essen rajta, mint a saját üresjársi feszültsége (a karakterisztikán az $U < 0$, $I > I_e$ tartomány). Hasonlóan, azt sem minden áramgenerátor „tűri”, hogy a névleges kapocsárammal ellentétes irányú áram folyjon át rajta (a karakterisztikán az $I < 0$, $U > U_{\text{ü}}$ tartomány). Különösen érzékenyek ebből a szempontból az elektronikusan megvalósított áramgenerátorok (tápegységek).

Kapcsoló

A mechanikus kapcsolók igen jó közelítéssel valósítják meg az ideális kapcsolót, működésük lényegében az áramkör mechanikus megszakítására, ill. zárására alapulnak. Kicsiny eltérést az ideálistól az okozhat, hogy zárt állapotban sem nulla ellenállást képviselnek, így karakterisztikájuk nem simul bele teljesen az I -tengelybe. Az átmeneti ellenállás a mechanikai kontaktusnál a legnagyobb, így ott legnagyobb a hőfejlődés is. Ez lehet olyan mértékű is, ami az érintkező anyagát megolvasztja (a kapcsoló **beég**), ami értelemszerűen alkalmatlanná teszi a kapcsolót a további működésre. Ez ellen egyrészt az igen jó vezetőképességű érintkező felületek kialakításával igyekeznek védekezni, másrészt azzal, hogy bekapcsolt állapotban az érintkező felületeket mechanikailag összeszorítják, amit általában egy a kapcsolóban elhelyezett erős rugó biztosít. (Ebből származik a mechanikus kapcsolók működésére annyira jellemző, állapotváltozásukkor fellépő kattánás: a rugó a felületeket szinte egymáshoz csapja.) A kapcsoló alkatrészeit szigetelő anyagra szerelik, így kikapcsolt állapotban a kapcsolónak végtelen nagy ellenállást kellene képviselnie, de mert tökéletes szigetelő anyag nincs, ilyenkor is van a kapcsolónak átvezetése, ami azt eredményezi, hogy karakterisztikája nem simul be tökéletesen az U -tengelybe.

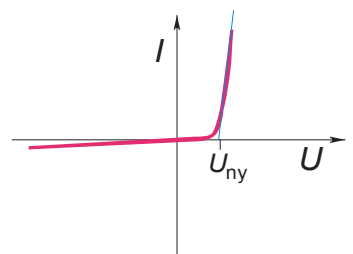
További kellemetlen tulajdonsága a mechanikus kapcsolóknak az állapotváltozásukkor fellépő **pergés**, ami azt jelenti, hogy mielőtt a végleges állapotváltozás bekövetkezne, a kapcsoló állapota többször (esetenként akár néhány százszor vagy ezerszer) is vált a bekapcsolt és a kikapcsolt állapot között. (Az ábra egy a $t = 0$ pillanatban bekapcsolt állapotba vezérelt kapcsolón keresztül meginduló áram időfüggését mutatja.) A pergés kiküszöbölése a mechanikus megszakítás elvére épülő kapcsolók esetében csak a kapcsoló-felületek igen speciális kialakításával biztosítható, pl. az ún. higanyos kapcsolókkal, ahol a kontaktust egy higanycsepp biztosítja, és ennek elszakadásakor a felületi feszültség a két újabb higanycseppet összerántja, így már nem jöhet létre újabb kontaktus. Ugyanez a folyamat fordítva játszódik le a kapcsoló zárásakor. A higanyos kapcsolók hátránya a viszonylag bonyolult kialakításon túl, hogy működési elvükből fakadóan csak viszonylag kis áramok kapcsolására alkalmasak, továbbá, hogy csak meghatározott mechanikai helyzetben működőképesek.




Az elektronikus kapcsolók általában valamilyen tranzisztort tartalmaznak, ami feszültség- vagy áram-jellel vezérelhető egyik állapotból a másikba (vannak más speciálisan erre a célra kifejlesztett elektronikus alkatrészek is, pl. tirisztor, triac, UJT). Hátrányuk, hogy be- és kikapcsolt állapotukban általában egyaránt kevésbé közelítik az ideális kapcsolót, mint mechanikusak, továbbá gyakori, hogy polaritásérzékenyek is (csak meghatározott polaritású feszültség kapcsolására alkalmasak). Előnyük viszont, hogy mentesek a pergés jelenségétől, és a mechanikus kapcsolókhöz képest gyorsak (= igen rövid idő alatt képesek állapotot váltani).


Dióda

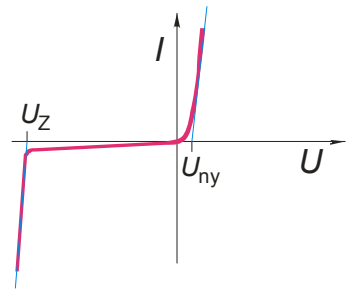
A diódákat általában ún. n - és p -típusú félvezető anyagokból alakítják ki (az n -réteg a katód, a p -réteg az anód), de még ma is használatosak az ún. vákuumdiódák is, amelyek működéséhez folyamatosan működő külön energiaforrás szükséges (fűteni kell őket). Karakterisztikájuk a működés fizikai alapjaitól függően észrevehetően eltér az ideálistól: zárt állapotukban is folyik rajtuk áram (bár ez nagyságrendekkel kisebb lehet, mint a nyitott állapotban átfolyó áram), másrészt nyitott állapotban sem nulla az ellenállásuk. További eltérés, hogy a nyitott és zárt állapot közötti átmenet nem egy jól meghatározott feszültségnél (a nyitófeszültségnél) következik be, hanem egy viszonylag szűk feszültségtartományban folyamatosan. Ilyenkor a nyitófeszültség értelmezésében a valós diódakarakterisztikát mutató ábra segíthet. A gyakorlatban elterjedten használt félvezető diódák nyitófeszültsége a félvezető anyagától és a kialakítástól függően $\approx 0,6 \text{ V} - 0,7 \text{ V}$. A felrajzolt karakterisztikából kiolvasható az is, hogy a valós diódával jó közelítéssel azonosan működő kétpólust alakíthatunk ki, egy ideális diódával párhuzamosan kapcsolt nagy értékű ellenállás (záró irányú ellenállás, r_z) és egy ezekkel sorbakapcsolt kis értékű ellenállás (nyitó irányú ellenállás, r_{ny}) alkalmazásával.



Sajátos tulajdonsága a félvezető diódáknak, hogy p - n -átmenet két oldalán ellentétes előjelű töltések gyűlnek fel: a lezárt állapotú dióda pirinyó kondenzátorként működik. Ez a tulajdonság nagyon jól használható annak figyelembevételével, hogy az így kialakuló kondenzátor kapacitása a lezárt állapotú diódára kapcsolt feszültségtől függ: így a lezárt állapotú dióda egy feszültséggel hangolható kondenzátornak is tekinthető, aminek számos alkalmazása ismeretes. A kifejezetten ilyen feladatok ellátására kifejlesztett (viszonylag nagy felületű) diódákat **varicap diódáknak** nevezzük. Ugyanakkor ez a tulajdonság hátrányos is lehet, ti. ahhoz, hogy a lezárt állapotú diódát nyitó állapotba vezérelhessük, először ki kell sütni a feltöltött kondenzátort, amihez idő kell. Mindezt figyelembe

véve, a valós dióda ideális kétpólusokból való felépítések az ideális diódával párhuzamosan egy ideális kondenzátort is párhuzamosan kell kapcsolnunk. A varicap dióda rajzjele: 

A $p-n$ -átmenettel megvalósított diódák zárófeszültségét növelve egy bizonyos jól meghatározható feszültségértéknél (**Zener-feszültség**) megszűnik a dióda lezárt állapota, és a dióda ezen a feszültségen kezd feszültséggenerátorhoz hasonlóan viselkedni: a félvezető dióda karakterisztikája a két ellentétes irányítással párhuzamosan kapcsolt ideális dióda karakterisztikájához hasonlatos. Szemben a nyitófeszültség alig befolyásolható értékével, a **Zener-letörés** (a karakterisztika menetének törés jellegű megváltozása a Zener-feszültség környezetében) feszültsége a félvezető anyagának alkalmas megválasztásával akár két nagyságrenden keresztül is tetszőlegesen beállítható. Bár a Zener-letörést a működés fizikai alapjai miatt minden félvezető dióda megvalósítja, mégsem szabad bármely diódára a Zener-letörést előidéző zárófeszültséget kapcsolni, mert az ekkor meginduló áram a nyitófeszültségnél legalább egy nagyságrenddel nagyobb Zener-feszültségnek megfelelő potenciálkülönbségen keresztül folyik, így az elektromos teljesítmény is legalább egy nagyságrenddel nagyobb, mint a dióda nyitott állapotában, ami a diódát általában tönkreteszi. Ha a dióda hűtése olymértékben biztosítva van, hogy a Zener-letörés létrejöttkor felszabaduló hő elvezetésére képes, a diódát megkülönböztetésül Zener-diódnak) nevezzük. A Zener-dióda rajzjele: 



A valós diódák nyitott állapotban és a Zener-letörés tartományában mutató feszültséggenerátor-jellegű viselkedését kihasználva a diódák mindkét működési tartományban elterjedten használatosak a feszültségstabilizálást ellátó áramkörökben. (Ezek bemutatását lásd később, a négy-pólusok tárgyalásánál!)

Véges belsőellenállású feszültségforrások soros kapcsolása és helyettesítése

n darab sorbakapcsolt $U_{e,k}$ elektromotoros erejű, $R_{b,k}$ belsőellenállású feszültségforráson eső feszültség: $\sum_{k=1}^n \underbrace{(U_{e,k} - IR_{b,k})}_{U_k}$ (ahol I a sorosan kapcsolt feszültséggenerátorok közös kapocsárama). Egyetlen feszültséggenerátor is szolgáltathatja ugyanezt a kapocsfeszültséget, ha

$$\sum_{k=1}^n \underbrace{(U_{e,k} - IR_{b,k})}_{U_k} = \underbrace{U_e - IR_b}_U \Rightarrow R_b = \sum_{k=1}^n R_{b,k}, \quad U_e = \sum_{k=1}^n U_{e,k},$$

vagyis az n darab sorbakapcsolt feszültséggenerátor helyettesíthető egyetlen olyannal, amelynek elektromotoros ereje $\sum_{k=1}^n U_{e,k}$, belső ellenállása pedig

$\sum_{k=1}^n R_{b,k}$. Ugyanennyi lehet a kapocsfeszültsége egy áramgenerátornak is:

$$\sum_{k=1}^n \underbrace{(U_{e,k} - IR_{b,k})}_{U_k} = \frac{I_e - I}{G_b} \Rightarrow I_e = G_b \sum_{k=1}^n U_{e,k}, \quad \frac{I}{G_b} = \sum_{k=1}^n IR_{b,k} \Rightarrow \frac{1}{G_b} = \sum_{k=1}^n R_{b,k}, \quad I_e = \frac{\sum_{k=1}^n U_{e,k}}{\sum_{k=1}^n R_{b,k}},$$

vagyis az n darab sorbakapcsolt feszültséggenerátor helyettesíthető egyetlen olyan áramgenerátorral, amelynek árama $\frac{\sum_{k=1}^n U_{e,k}}{\sum_{k=1}^n R_{b,k}}$, belső vezetése pedig

$\frac{1}{\sum_{k=1}^n R_{b,k}}$. Speciálisan egyetlen U_e elektromotoros erejű, R_b belsőellenállású feszültségforrás helyettesíthető $I_e = \frac{U_e}{R_b}$ áramú, $G_b = \frac{1}{R_b}$ belsővezetésű áramgenerátorral.

Véges belsőellenállású feszültségforrások párhuzamos kapcsolása és helyettesítése

n darab párhuzamosan kapcsolt $U_{e,k}$ elektromotoros erejű, $R_{b,k}$ belsőellenállású feszültségforrás árama: $\sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{U_{e,k} - U}{R_{b,k}}}_{I_k}$ (ahol U a párhuzamosan kapcsolt feszültséggenerátorok közös kapocsfeszültsége). Ugyanezt az áramot egyetlen feszültséggenerátor is szolgáltathatja, ha

$$\sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{U_{e,k} - U}{R_{b,k}}}_{I_k} = \frac{U_e - U}{R_b} \Rightarrow U_e = R_b \sum_{k=1}^n \frac{U_{e,k}}{R_{b,k}}, \quad \frac{U}{R_b} = \sum_{k=1}^n \frac{U}{R_{b,k}} \Rightarrow \frac{1}{R_b} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_{b,k}}, \quad U_e = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{U_{e,k}}{R_{b,k}}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_{b,k}}},$$

vagyis az n darab párhuzamosan kapcsolt feszültséggenerátor helyettesíthető egyetlen olyanval, amelynek elektromotoros ereje $\frac{\sum_{k=1}^n U_{e,k}}{\sum_{k=1}^n R_{b,k}}$, belsejellenállása $\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_{b,k}}$

pedig $\frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_{b,k}}}$. Ugyanezt az áramot egyetlen áramgenerátor is szolgáltathatja, ha

$$\sum_{k=1}^n \frac{U_{e,k} - U}{R_{b,k}} = I_e - GU \Rightarrow I_e = \sum_{k=1}^n \frac{U_{e,k}}{R_{b,k}}, \quad G_b U = \sum_{k=1}^n \frac{U}{R_{b,k}} \Rightarrow G_b = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_{b,k}}, \quad I_e = \sum_{k=1}^n \frac{U_{e,k}}{R_{b,k}},$$

vagyis az n darab párhuzamosan kapcsolt áramgenerátor helyettesíthető egyetlen olyan áramgenerátorral, amelynek árama $\sum_{k=1}^n \frac{U_{e,k}}{R_{b,k}}$, belső vezetése pedig $\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_{b,k}}$. Speciálisan az egyetlen feszültséggenerátor áramgenerátorral történő helyettesítésére ugyanazok az összefüggések adódnak, mint a soros kapcsolás speciális eseteként: $I_e = \frac{U_e}{R_b}, G_b = \frac{1}{R_b}$.

Véges belsejvezetésű áramforrások soros kapcsolása és helyettesítése

n darab sorbakapcsolt $I_{e,k}$ áramú, $G_{b,k}$ belsejvezetésű áramforrás kapocsfeszültsége $\sum_{k=1}^n \frac{I_{e,k} - I}{G_{b,k}}$ (ahol I a sorosan kapcsolt áramgenerátorok közös kapocsárama). Ugyanennyi lehet a kapocsárama egy feszültséggenerátornak is:

$$\sum_{k=1}^n \frac{I_{e,k} - I}{G_{b,k}} = \frac{U_e - IR_b}{U} \Rightarrow U_e = \sum_{k=1}^n \frac{I_{e,k}}{G_{b,k}}, \quad IR_b = \sum_{k=1}^n \frac{I}{G_{b,k}} \Rightarrow R_b = \sum_{k=1}^n \frac{1}{G_{b,k}}, \quad U_e = \sum_{k=1}^n \frac{I_{e,k}}{G_{b,k}},$$

vagyis az n darab sorbakapcsolt áramgenerátor helyettesíthető egyetlen feszültséggenerátorral, amelynek elektromotoros ereje $\sum_{k=1}^n \frac{I_{e,k}}{G_{b,k}}$, belsejellenállása pedig $\sum_{k=1}^n \frac{1}{G_{b,k}}$. Speciálisan egyetlen I_e áramú, G_b belsejvezetésű áramforrás helyettesíthető egy $U_e = \frac{I_e}{G_b}$ elektromotoros erejű, $R_b = \frac{1}{G_b}$ belsejellenállású feszültséggenerátorral. Egyetlen áramgenerátor is szolgáltathatja ugyanezt a kapocsfeszültséget, ha

$$\sum_{k=1}^n \frac{I_{e,k} - I}{G_{b,k}} = \frac{I_e - I}{G_b} \Rightarrow I_e = G_b \sum_{k=1}^n \frac{I_{e,k}}{G_{b,k}}, \quad \frac{I}{G_b} = \sum_{k=1}^n \frac{I}{G_{b,k}} \Rightarrow \frac{1}{G_b} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{G_{b,k}}, \quad I_e = \frac{\sum_{k=1}^n I_{e,k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{G_{b,k}}},$$

vagyis az n darab sorbakapcsolt áramgenerátor helyettesíthető egyetlen olyanval, amelynek árama $\frac{\sum_{k=1}^n I_{e,k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{G_{b,k}}}$, belső vezetése pedig $\frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{G_{b,k}}}$.

Véges belsejvezetésű áramforrások párhuzamos kapcsolása és helyettesítése

n darab párhuzamosan kapcsolt $I_{e,k}$ áramú, $G_{b,k}$ belsejvezetésű áramforrás árama: $\sum_{k=1}^n \frac{I_{e,k} - U}{G_{b,k}}$ (ahol U a párhuzamosan kapcsolt feszültséggenerátorok közös kapocsfeszültsége). Ugyanezt az áramot egyetlen feszültséggenerátor is szolgáltathatja, ha

$$\sum_{k=1}^n \frac{I_{e,k} - U}{G_{b,k}} = \frac{U_e - U}{R_b} \Rightarrow U_e = R_b \sum_{k=1}^n I_{e,k}, \quad \frac{U}{R_b} = \sum_{k=1}^n U G_{b,k} \Rightarrow \frac{1}{R_b} = \sum_{k=1}^n G_{b,k}, \quad U_e = \frac{\sum_{k=1}^n I_{e,k}}{\sum_{k=1}^n G_{b,k}},$$

vagyis az n darab párhuzamosan kapcsolt áramgenerátor helyettesíthető egyetlen olyan feszültséggenerátorral, amelynek elektromotoros ereje $\frac{\sum_{k=1}^n I_{e,k}}{\sum_{k=1}^n G_{b,k}}$, belsőellenállása pedig $\frac{1}{\sum_{k=1}^n G_{b,k}}$. Speciálisan az egyetlen áramgenerátor feszültséggenerátorral történő helyettesítésére ugyanazok az összefüggések adódnak,

mint a soros kapcsolás speciális eseteként: $U_e = \frac{I_e}{G_b}$, $R_b = \frac{1}{G_b}$. Ugyanezt az áramot egyetlen áramgenerátor is szolgáltathatja, ha


$$\sum_{k=1}^n (I_{e,k} - G_{b,k} U) = I_e - GU \Rightarrow I_e = \sum_{k=1}^n I_{e,k}, \quad G_b U = \sum_{k=1}^n G_{b,k} U \Rightarrow G_b = \sum_{k=1}^n G_{b,k}, \quad I_e = \sum_{k=1}^n I_{e,k},$$


vagyis az n darab párhuzamosan kapcsolt áramgenerátor helyettesíthető egyetlen olyannal, amelynek árama $\sum_{k=1}^n I_{e,k}$, belső vezetése pedig $\sum_{k=1}^n G_{b,k}$.

Sorosan, ill. párhuzamosan kapcsolt véges belsőellenállású és -vezetésű források helyettesítésének összefoglalása

Forrástípus	Soros kapcsolás				Párhuzamos kapcsolás			
	Feszültséggenerátorral		Áramgenerátorral		Feszültséggenerátorral		Áramgenerátorral	
	Elektromotoros erő	Belső-ellenállás	Áram	Belső-vezetés	Elektromotoros erő	Belső-ellenállás	Áram	Belső-vezetés
Feszültséggenerátor	$U_e = \sum_{k=1}^n U_{e,k}$	$R_b = \sum_{k=1}^n R_{b,k}$	$I_e = \frac{\sum_{k=1}^n U_{e,k}}{\sum_{k=1}^n R_{b,k}}$	$\frac{1}{G_b} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_{b,k}}$	$U_e = \frac{\sum_{k=1}^n U_{e,k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_{b,k}}}$	$\frac{1}{R_b} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_{b,k}}$	$I_e = \sum_{k=1}^n \frac{U_{e,k}}{R_{b,k}}$	$G_b = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_{b,k}}$
Áramgenerátor	$U_e = \sum_{k=1}^n \frac{I_{e,k}}{G_{b,k}}$	$R_b = \sum_{k=1}^n \frac{1}{G_{b,k}}$	$I_e = \frac{\sum_{k=1}^n I_{e,k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{G_{b,k}}}$	$\frac{1}{G_b} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{G_{b,k}}$	$U_e = \frac{\sum_{k=1}^n I_{e,k}}{\sum_{k=1}^n G_{b,k}}$	$\frac{1}{R_b} = \sum_{k=1}^n G_{b,k}$	$I_e = \sum_{k=1}^n I_{e,k}$	$G_b = \sum_{k=1}^n G_{b,k}$

A feszültség és az áram mérése

A feszültség és az árammérő eszközök speciális kétpólusnak tekinthetők, amelyekről leolvasható a rajtuk eső feszültség, ill. a rajtuk átfolyó áram. (Ezek az eszközök tehát – mint a műszerek általában – a saját magukon eső feszültséget, ill. a saját magukon átfolyó áramot mérik!) Ebből adódik, hogy a feszültségmérőt az áramkör azon két pontjára kell csatlakoztatni, amely két pont között eső feszültséget meg akarjuk határozni (hogy rajta is ugyanaz a feszültség eszen, mint a mérendő két pont között). Kívánatos, hogy maga a mérés (azaz a mérőműszer csatlakoztatása) ne befolyásolja az áramkör működését. Ez akkor teljesülhet, ha a műszeren keresztül nem indul áram, vagyis, ha a műszer ellenállása igen nagy (ideális határesetben végtelen), és a műszer kapacitása igen kicsi (ideális határesetben nulla). Megjegyezzük, hogy stacionárius feszültségek mérésekor a műszer kapacitásának csak akkor van jelentősége, ha a feszültségmérő kapacitív elemének feltöltődéséhez több idő kell, mint a mérés ideje (l. még az R-C-köröknél az időállandóra vonatkozó okfejtést). A feszültségmérő rajzjele: 

Hasonló a helyzet az áramok mérésével is: el kell érni, hogy mérendő áram átfolyjon a mérőműszere. Ehhez azt a vezetékét, amelyben a mérendő áram folyik, meg kell szakítani, és az árammérőt mint vezetéktoldalékot be kell iktatnunk a megszakított vezetékbe. Természetesen az árammérés esetében is kívánatos, hogy maga a mérés ne befolyásolja a mérendő áramot, vagyis, hogy a beiktatott műszer ideális vezetéknek működjön. Ez akkor teljesülhet, ha a műszeren nem esik feszültség, vagyis, ha a műszer ellenállása nagyon kicsi (ideális határesetben nulla), és a műszer önindukciós együtthatója is igen kicsi (ideális határesetben nulla). Megjegyezzük, hogy stacionárius áramok mérésekor a műszer önindukciós együtthatójának csak akkor van jelentősége, ha az árammérő indukciós elemén az áram stacionárius jellegének beállításához több idő kell, mint mérés ideje (l. még az R-L-köröknél az időállandóra vonatkozó okfejtést). Az árammérő rajzjele: 

A feszültség- és árammérő műszerek két nagy csoportba sorolhatók: analóg műszerek és digitális műszerek. Az analóg műszerek általában áramot mérnek (a feszültségmérők is!), mégpedig úgy, hogy az áram valamilyen hatását kihasználva a rajtuk átfolyó áramerősségtől függő, jól látható, mérhető mechanikai elmozdulást hoznak létre (mutató műszerek). Legelterjedtebbnek az ún. **Deprez-elven** működő műszerek tekinthetők, amelyekben a mérendő áram egy mágnespatkó sarkai között könnyen elforduló apró szolenoidon folyik keresztül, s így arra a mágneses mező a mérendő árammal arányos forgatónyomatékat fejt ki. Ezt a forgatónyomatékat egy spirálrugó egyensúlyozza ki, de mert a spirálrugó által kifejtett forgatónyomaték a szögelfordulással arányos, az egyensúlyi helyzet a szolenoidon átfolyó árammal arányos szögelfordulásnál áll be. A szögelfordulást egy a szolenoidra erősített, alkalmas skála fölött forgó mutató jelzi ki. Ezek a műszerek számos komoly nehézséggel küzdenek. Ilyen például, hogy a mérendő áram lökészerű bekapcsolásakor a rugalmas kölcsönhatással (spirálrugó) egyensúlyi helyzetben tartott mutató az új egyensúlyi helyzet felé haladtában az új egyensúlyi helyzetten könnyen túllendülhetett, akörül rezgőmozgást végezhetett (hasonlóan, mint a meglökött hinta). Ennek elkerülésére a mutató mozgását csillapítják (súrlódással fékezik). Az esetlegesen túlmérete-

zett csillapítás azonban azt eredményezheti, hogy a mutató el sem jut az új egyensúlyi helyzetig, előtte megáll. A rezgő rendszerek elméletéből ismeretes, hogy adott paraméterekkel rendelkező rezgő rendszerhez egyetlen olyan mértékű csillapítás létezik, ami biztosítja, hogy a rezgő rendszer a meglökését követően nem lép túl az egyensúlyi helyzeten, hanem éppen addig mozogva ott megáll. Olyan sűrűlódási csillapítást beállítani, amely ezt az ideális esetet (**aperiodikus határeset**) a műszer élettartamán keresztül mindvégig stabilan biztosítja, nem könnyű technikai feladat.

Ugyancsak megoldandó mechanikai problémát jelent, hogy a mutatót a tömegközéppontjában kell a forgó tengelyre felfüggeszteni, mert ellenkező esetben a mutató súlya is fejtene ki rá forgatónyomatékokat, ami a mérést meghamisítaná.

További nehézséget jelent a mutatós műszerek alkalmazásában, hogy a mutató szükségképpen a leolvasható skála fölött mozog, így az egyértelmű leolvasáshoz a skálát pontosan szemből kell nézni. Ezt a skálába épített tükörrel igyekeznek megkönnyíteni: pontosan szemből nézve ugyanis a tükörben nem látszik a mutató képe (mert azt elfedi maga a mutató), így figyelmes leolvasással elkerülhető a leolvasás ún. **parallaxishibája**.

Sok esetben hátrányt jelent, hogy a mutatós műszerek a mechanikai kialakítás következtében lassúak: a mutató új egyensúlyi helyzetének beállításához kb. 1 másodperc van szükség, így az ennél gyorsabb változásokat a mutatós műszerek legfeljebb tendenciájukban jelzik.

A Deprez-műszerek belső ellenállása a működési elvből következően, a kialakításuktól függően $\sim 10-1000 \Omega$ nagyságrendbe esik. Ez a feszültségméréshez általában kevés, az áramméréshez pedig általában sok. Szerencsére a Deprez-műszerek alkalmas kialakítás mellett nagyon érzékenyek (= nagyon kis áramok hatására is jól érzékelhető mutatóelmozdulást produkálnak, így egy alkalmasan nagy ellenállással sorbakötve (**előtét-ellenállás**) már feszültségmérésre is alkalmassá tehetők. Ilyenkor a műszeren átfolyó áram, $I = \frac{1}{R_b + R_c} U$, ahol R_b a műszer belső ellenállása, R_c az előtét-ellenállás értéke, U pedig a mérendő feszültség. Láthatjuk, hogy a műszer által kijelzett áram erőssége arányos a mérendő feszültséggel, így a skálára közvetlenül a feszültségeket írhatjuk fel (a skálát feszültségmérésre hitelesíthetjük). Ha a műszer I_0 erősségű áram vezérlő végkiterésbe, akkor az U_{\max} feszültséghez tartozó végkiterést

$U_{\max} = I_0 (R_b + R_c) \Rightarrow R_c = \frac{U_{\max}}{I_0} - R_b$ értékű előtét-ellenállás alkalmazásával állíthatjuk be. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az R_c értékű előtét-ellenállás az eredetileg $U_0 = I_0 R_b$ értékű feszültség-méréshatárt

$\frac{U_{\max}}{U_0} = \frac{R_b + R_c}{R_b} = 1 + \frac{R_c}{R_b}$ -szeresére terjeszti ki.

Kihasználva a Deprez-műszerek érzékenységét, áramméréskor általában elegendő a mérendő áram egy részét a műszeren átbocsátani. A maradék rész egy a műszerrel párhuzamosan kötött ellenálláson keresztül folyhat (**sönt-ellenállás**). Ha azt várjuk, hogy sönt-ellenállással ellátott műszert az I_{\max} áram vezérlő

végekiterésbe, akkor $I_0 R_b = (I_{\max} - I_0) R_s \Rightarrow R_s = \frac{I_0}{I_{\max} - I_0} R_b$ értékű sönt-ellenállást kell alkalmaznunk. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az R_s értékű sönt-

ellenállás az eredetileg I_0 értékű áram-méréshatárt $\frac{I_{\max}}{I_0} = \frac{R_b + R_s}{R_s} = 1 + \frac{R_b}{R_s}$ -szeresére terjeszti ki.

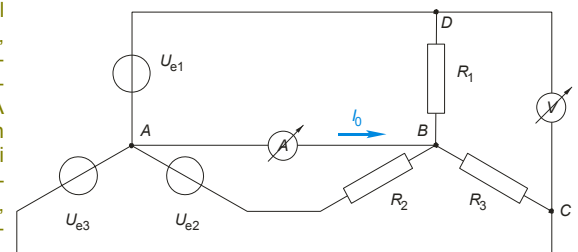
Az ismertetett működésből következően a Deprez-műszerek bemenő ellenállása függ az alkalmazott előtét- vagy sönt-ellenállás értéke szerint az éppen beállított mérés határtól. Így aztán üzemszerűen állhat elő az a helyzet, hogy más mérés határba kapcsolva a műszer más feszültséget vagy áramot jelez ki (mert a műszer belső ellenállásának megváltozása miatt valóban más feszültség esik rajta, ill. más áram folyik át rajta). Ebből a szempontból a magasabb mérés határ pontosabb mérést biztosít ugyan, azonban az alapműszer kijelzési pontossága a működési elvből fakadóan kisebb kitérésnél kisebb.

Analóg műszerek is készülnek olyan elektronikával (bemeneti erősítővel) kombinálva, amelynek a feladata az, hogy egyrészt a műszer bemenő ellenállását jobban hozzáigazítsa a mérési feladathoz, másrészt, hogy kisebb feszültségek és áramok mérésére is alkalmassá tegye őket. A digitális műszerek azonban kivétel nélkül ilyen elektronikával készülnek, aminek eredményeképpen feszültségmérés üzemmódban a bemenő ellenállásuk $\sim 100-1000 M\Omega$ nagyságrendbe esik. Ez a gyakorlati feladatok döntő többségében már olyan érték, amely lehetővé teszi, hogy ideális feszültségmérőként alkalmazhassuk őket, és szinte maradék nélkül kiküszöböli azt a hibát, hogy más mérés határba kapcsolva a műszer más értéket mérjen.

A digitális műszerek lényegében mentesek az analóg műszerek szinte minden további hibájától is: leolvasásukkor nincs parallaxis-hiba, mechanikai kialakításuk nem kritikus, rázásra, ütésre sokkal kevésbé érzékenyek, gyorsak, sokkal könnyebben készíthetők hozzájuk racionalizált mérés határokkal. Ezen túl képessé tehetők a mért értékek tárolására, vagy akár számítógépbe történő átküldésére. Ugyanakkor nem alkalmasak arra (amire minden Deprez-műszer képes, ti. hogy a mért értékben való rövid idejű változást legalább tendenciájában kijelezzék (amire a mutatós műszerek éppen a lassúságuk miatt képesek). Sokszor van szükség olyan mérésre, ahol a mérés eredménye konkrét értéke érdektelen, elég azt leolvasni, hogy „most nagyobb, mint az előbb”. Míg a mutatós műszereknél az ilyen jellegű leolvasások egyetlen rápillantással elvégezhetők, a digitálisan kijelzett értékeket ehhez előbb tudatosítanunk kell, ami részben fárasztó, részben hibaforrás is. Gyakran készítenek ezért a digitálisan működő műszerekhez analóg kijelzőt is (ahhoz hasonlóan, ahogyan a ma már egyeduralgkodó digitális órákat is egyre nagyobb arányban látják el analóg (mutatós) kijelzéssel is).

Megjegyzés

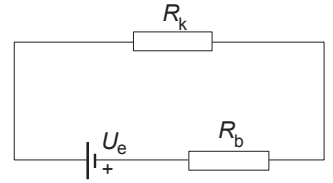
- Elterjedten használatos a mérőműszereknek a mérendő áramkörhöz való csatlakoztatásával kapcsolatban az a félígazság, miszerint a feszültségmérőt „a fogyasztóval párhuzamosan”, az árammérőt „a fogyasztóval sorosan” kell bekapcsolni. Ez ugyan igaz, ha éppen egy konkrét „fogyasztón” eső feszültséget vagy a rajta átfolyó áramot akarjuk megmérni, a gyakorlatban azonban sokkal általánosabb helyzetekben is kell feszültséget és áramot mérnünk. A mellékelt ábrán pl. a C és D pontok közötti feszültséget a berajzolt feszültségmérő helyesen méri, noha egyetlen fogyasztóval sincs párhuzamosan kapcsolva. Hasonlóan helyesen méri az A és B pontok között folyó áramot (a csillagpontok között folyó áram) a berajzolt árammérő, noha egyetlen fogyasztóval sincs sorosan kapcsolva (sőt, sokkal inkább mondhatjuk, hogy **párhuzamosan** van kapcsolva a sorbakötött U_{e2} feszültséggenerátorral és az R_2 ellenállással, és hasonlóan $U_{e3}-R_3$ -mal, ill. $U_{e1}-R_1$ -gyel is.)



- Szokás a szaknyelvben a feszültségmérő helyett a „voltmérő”, az árammérő helyett az „ampermérő” megnevezést használni. Ez pontosan úgy hangzik, mint ahogyan a „métermérő”, az „óramérő”, a „newtonmérő”, stb. hangzana, ha ezeket is használnánk a hosszúságmérő, az időmérő és az erőmérő helyes megnevezése helyett. Az igényes szaknyelvben az ilyenféle megnevezéseknek helyük nincs!

Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti áramkörben folyó áram erősségét az ott feltüntetett adatok ismeretében!



Megoldás

Írjuk fel a huroktörvényt a feszültséggenerátor Thèvenin-féle helyettesítő képének alkalmazásával: $U_e - IR_b - \underbrace{IR_k}_{U_{R_k}} = 0$

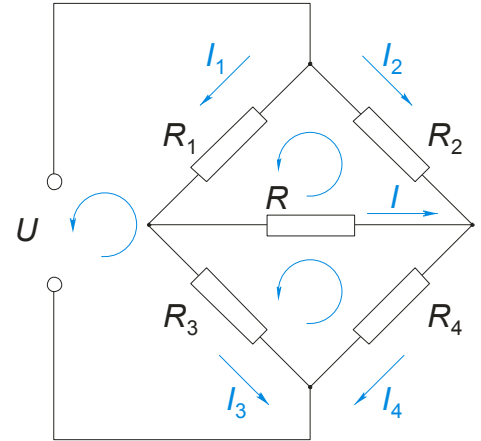
$\Rightarrow I = \frac{U_e}{R_k + R_b}$, ahol az ellenállásokon eső feszültségeket az Ohm-törvényből határoztuk meg.

Megjegyzés

Elterjedt (de hibás, és káros) szokás ennek a feladatnak az eredményét mint egy újabb áramköri törvényt emlegetni „Ohm törvénye teljes áramkörre” néven. Valójában itt egy a huroktörvény, az Ohm-törvény és a Thèvenin-féle helyettesítő kép együttes alkalmazásával megoldott feladat végeredményéről van szó, s mint ilyen nem szokás (és nem is célszerű) külön áramköri törvényként emlékezetbe vésni. Már csak azért sem, mert ezzel romboljuk az Ohm-törvény tiszta, világos (és egyszerű!) jelentéstartalmát: az Ohm-törvény két pont között fennálló potenciálkülönbség és az ugyanezen két pont között folyó áram között állapít meg egy egyszerű kapcsolatot, ennek a feladatnak az eredménye pedig egy zárt hurokban (ami alapvetően más, mint a két pont) folyó áram erőssége és a hurokban elhelyezett feszültséggenerátor elektromotoros ereje között állapít meg kapcsolatot. A két teljesen különböző dolognak – ti. az Ohm-törvénynek és e feladat végeredményének – csak annyi köze van egymáshoz, hogy mindkettőben azonos jellegű mennyiségek fordulnak elő, továbbá, hogy e feladat megoldásához ismernünk kell magát az Ohm-törvényt is.

Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti áramkörben (Wheatstone-híd) az R értékű ellenálláson átfolyó áramot az ellenállások értékének ismeretében!



Megoldás

Alkalmazzuk a huroktörvényt az ábra szerinti hurkokra:

$I_1 R_1 + IR - I_2 R_2 = 0,$

$I_3 R_3 - I_4 R_4 - IR = 0.$

A csomóponti törvény szerint:

$-I_1 + I_3 + I = 0 \Rightarrow I_1 = I_3 + I,$

$-I_2 - I + I_4 = 0 \Rightarrow I_2 = I_4 - I.$

A huroktörvény a tápfeszültséget is magába foglaló hurokra:

$U - I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0.$

Az egyenleteket a bennük előforduló ismeretlenek szerint rendezve:

$$\begin{array}{cccccc} RI & +R_1 I_1 & -R_2 I_2 & & & = & 0 \\ -RI & & & +R_3 I_3 & -R_4 I_4 & = & 0 \\ I & -I_1 & & & +I_3 & = & 0 \\ -I & & -I_2 & & & +I_4 & = & 0 \\ +R_1 I_1 & & & +R_3 I_3 & & = & U \end{array}$$

Az egyenletrendszer determinánsát a 4. oszlopa szerint kifejtve:

$$D = \begin{vmatrix} R & R_1 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R & 0 & 0 & R_3 & -R_4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & R_1 & 0 & R_3 & 0 \end{vmatrix} = R_4 \begin{vmatrix} R & R_1 & -R_2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & R_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} R & R_1 & -R_2 & 0 \\ -R & 0 & 0 & R_3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & R_1 & 0 & R_3 \end{vmatrix} = R_4 \begin{vmatrix} R & R_1 & -R_2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & R_1 & 0 \end{vmatrix} + R_3 R_4 \begin{vmatrix} R & R_1 & -R_2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + R_2 \begin{vmatrix} -R & 0 & R_3 \\ 0 & R_1 & R_3 \end{vmatrix} =$$

$$= R_4 (R_1 R_2 + R R_1) + R_3 R_4 (R + R_2 + R_1) + R_2 (R R_3 + R_1 R_3 + R R_1) = R_1 R_2 R_4 + R R_1 R_4 + R R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R R_2 R_3 + R_1 R_2 R_3 + R R_1 R_2 =$$

$$= R (R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4) + R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4 = R (R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4) + R_1 R_2 (R_3 + R_4) + (R_1 + R_2) R_3 R_4.$$

Az I változóhoz tartozó determináns:

$$D_I = \begin{vmatrix} 0 & R_1 & -R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_3 & -R_4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ U & R_1 & 0 & R_3 & 0 \end{vmatrix} = U \begin{vmatrix} R_1 & -R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & R_3 & -R_4 \\ R_1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + R_2 \begin{vmatrix} 0 & R_3 & -R_4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) U = (-R_1 R_4 + R_2 R_3) U.$$

Ezekkel a keresett áram:

$$I = \frac{D_I}{D} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R (R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4) + R_1 R_2 (R_3 + R_4) + (R_1 + R_2) R_3 R_4} U.$$

Látható, hogy ha $R_2R_3 - R_1R_4 = 0$, akkor R értékétől függetlenül a rajta átfolyó áram nulla. Ilyenkor a Wheatstone-hidat **kiegyenlítettnek** mondjuk.

Megjegyzés

- A kiegyenlítetttség feltételét az itt bemutatott viszonylag hosszadalmas számolás nélkül is meghatározhatjuk, ha az R értékű ellenállást a hídból kivesszük, és annak feltételét keressük, hogy az így keletkező két feszültségosztó azonos feszültséget állítson elő az R_3 , ill. az R_4 ellenálláson (mert, ha e két pont között nulla a potenciálkülönbség, akkor bármilyen ellenállással kötjük is össze őket, azon áram nem indul):

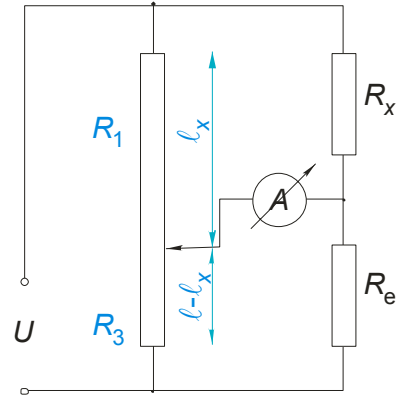
$$U_{R_3} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} U, \text{ és } U_{R_4} = \frac{R_4}{R_2 + R_4} U \Rightarrow \frac{R_3}{R_1 + R_3} U = \frac{R_4}{R_2 + R_4} U \Rightarrow R_2R_3 + R_3R_4 = R_1R_4 + R_3R_4 \Rightarrow R_2R_3 = R_1R_4.$$

- A Wheatstone-hidat elterjedten használják ismeretlen értékű ellenállások ismert értékűvel való összehasonlítással történő meghatározására. Ehhez a híd egyik ágában helyezik el a mérendő ellenállást, és az összehasonlításra használt pontosan ismert értékű ellenállást is, a másik ágban pedig egy tetszőleges ellenállású potenciómétert kötnek, amelynek csúszkáját a két hídág középpontját összekötő árammérőhöz kapcsolják az ábra szerint. Olyan potenciómétert használnak, amelyről a potencióméter osztásaránya pontosan leolvasható. Ez viszonylag könnyen megvalósítható a csúszka geometriai helyzetének mérésével: ha potencióméterként pl. egy egyenes huzalt használunk, akkor a csúszka által megvalósított ellenállás-osztásarány egyenlő a csúszka

által kijelölt huzalhossz-aránnyal, $\frac{R_1}{R_3} = \frac{\ell_x}{\ell - \ell_x}$, ahol ℓ a huzal teljes hossza, ℓ_x pedig a csúszka távolsága a huzal felső végétől. A mérést úgy végezzük,

hogy a csúszkát addig mozgatjuk, míg a műszer nulla értéket nem jelez ki. Ekkor a híd kiegyenlített, így $\frac{\ell_x}{\ell - \ell_x} = \frac{R_x}{R_e}$, ahol R_e az ismert értékű etalon-

ellenállás. Ebből az ismeretlen ellenállás értéke ℓ_x mérésből származó ismeretében meghatározható: $R_x = \frac{\ell_x}{\ell - \ell_x} R_e$. Ezzel az ellenállásértékek összehasonlítását az igen pontosan mérhető hosszúságok összevetésére vezettük vissza. A módszer lényege, hogy a tulajdonképpeni mérést végző műszeren a leolvasáskor nem folyik áram, így az magát a mérési eredményt nyilvánvalóan nem befolyásolhatja.

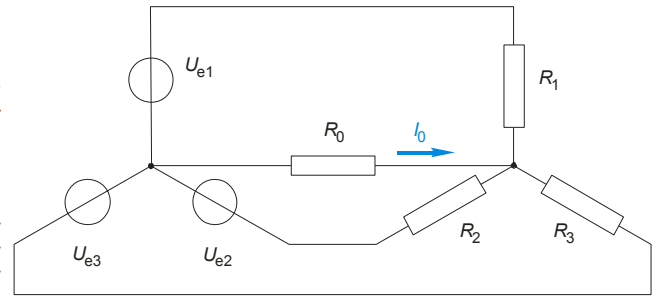


Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti elrendezésben az R_0 ellenálláson átfolyó áramot, és a rajta eső feszültséget (a feszültséggenerátorok elektromotoros erejének és a velük sorbakötött ellenállások értékének ismeretében)!

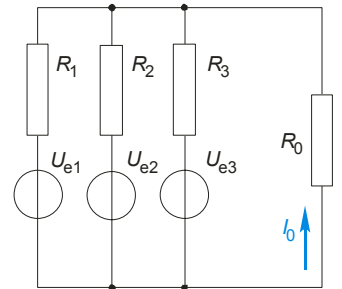
Megoldás

A feszültséggenerátorok az általuk táplált ellenállásokkal sorba vannak kötve, így tekinthetjük a kapcsolást olyanak, mintha ezek a generátorok belső ellenállásai lennének, vagyis a három, R_1, R_2, R_3 belső ellenállású, párhuzamosan kapcsolt feszültséggenerátort az R_0 ellenállás terheli. A három feszültséggenerátor eredő elektromotoros ere-



je: $U_e = \frac{U_{e,1} + U_{e,2} + U_{e,3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$, eredő belső ellenállása $R_b = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$, vagy az ellenállások helyett a vezetésekkel

megfogalmazva: $U_e = \frac{G_1 U_{e,1} + G_2 U_{e,2} + G_3 U_{e,3}}{G_1 + G_2 + G_3}$ és $G_b = G_1 + G_2 + G_3$.



A terhelésen folyó áram a huroktörvény szerint $I_0 = \frac{U_e}{R_0 + R_b} = \frac{U_e}{R_0 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}} = \frac{U_e}{R_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + 1}$. Az R_0 ellenálláson

eső feszültség: $U_0 = R_0 I_0 = \frac{U_e}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_0}}$, vagy a vezetésekkel megfogalmazva $U_0 = \frac{G_1 U_{e,1} + G_2 U_{e,2} + G_3 U_{e,3}}{G_0 + G_1 + G_2 + G_3}$. Ez az ún. **Millmann-képlet**, amit **csillag-pont-eltolódás törvénye** néven is szokás emlegetni. Segítségével – U_0 ismeretében – az egyes ellenállásokon eső feszültségek és a rajtuk átfolyó áramok

már könnyen meghatározhatók: $U_k = U_{e,k} - U_0$, és $I_k = \frac{U_k}{R_k} = \frac{U_{e,k} - U_0}{R_k}$. Ha a két csillagpont nincs összekötve ($= R_0 = \infty$, vagy ami ugyanaz $G_0 = 0$), akkor

$U_0 = \frac{G_1 U_{e,1} + G_2 U_{e,2} + G_3 U_{e,3}}{G_1 + G_2 + G_3}$. Ha a két csillagpont elhanyagolható ellenállású vezetővel van összekötve ($= R_0 = 0$, vagy ami ugyanaz $G_0 = \infty$), akkor $U_0 = 0$, s

így $U_k = U_{e,k}$, vagyis az ellenállásokon eső feszültségek a megfelelő elektromotoros erőkkel egyenlők.

Megjegyzés

Az itt bemutatott kapcsolás a későbbiekben tárgyalandó háromfázisú rendszerek alapkapcsolásának tekinthető: az R_0 ellenálláson átfolyó áram az ún. nullavezetéken folyó áram.

Feladat

Határozzuk meg, mekkora terhelő ellenállás mellett szolgáltat legnagyobb teljesítményt az U_e elektromotoros erejű, R_b belsőellenállású feszültségforrás! Mennyi ekkor a telepből kivett maximális teljesítmény?

Megoldás

Alkalmazzuk a feszültségforrásra a Thèvenin-féle helyettesítő képet, és az R terhelő ellenálláson átfolyó áram meghatározásához írjuk fel az áramkörre a huroktörvényt: $U_e - R_b I - RI = 0 \Rightarrow I = \frac{U_e}{R+R_b}$. A terhelő ellenállásra jutó teljesítmény $P(R) = RI^2(R) = \frac{R}{(R+R_b)^2} U_e^2$. E kifejezés R szerinti maximuma szolgáltatja a megoldást:

$$\frac{d}{dR} \left(\frac{R}{(R+R_b)^2} U_e^2 \right) = \frac{(R+R_b)^2 - 2(R+R_b)R}{(R+R_b)^4} U_e^2 = 0 \Rightarrow (R+R_b)^2 - 2R(R+R_b) = 0 \Rightarrow R+R_b - 2R = 0 \Rightarrow R_b - R = 0 \Rightarrow R = R_b.$$

Tehát a telepet a belső ellenállásával egyenlő külső ellenállással kell terhelni, hogy a teljesítmény a terhelésen maximális legyen. A telep által szolgáltatott teljesítmény ekkor: $P_{\max} = \frac{R_b}{4R_b^2} U_e^2 = \frac{U_e^2}{4R_b}$.

Feladat

Határozzuk meg, mekkora terhelő ellenállás mellett szolgáltat legnagyobb teljesítményt a terhelésen az I_e áramú, G_b belső vezetőségű áramforrás! Mennyi ekkor a telepből kivett maximális teljesítmény?

Megoldás

Alkalmazzuk az áramforrásra a Norton-féle helyettesítő képet, és az G külső terhelésen eső feszültség meghatározásához írjuk fel a csomóponti törvényt: $I_e - G_b U - GU = 0 \Rightarrow U = \frac{I_e}{G+G_b}$. A terhelő ellenállásra jutó teljesítmény $P(G) = GU^2(G) = \frac{G}{(G+G_b)^2} I_e^2$. E kifejezés G szerinti maximuma szolgáltatja a megoldást. Látjuk, hogy ez a feladat matematikai szempontból teljes egészében megegyezik az előzővel, csupán az R helyére most G -t, az R_b helyére G_b -t, U_e helyére I_e -t kell írni, így az eredmény is ugyanaz, csak az eredményben is el kell végezni ezeket a helyettesítéseket: $G = G_b$. Ugyanezt a terhelés ellenállásával megfogalmazva: $R = \frac{1}{G_b}$. Összefoglalva, a telepet a belső vezetőségével egyenlő külső vezetéssel kell terhelni, hogy a terhelésen a teljesítmény maxi-

mális legyen, amikor is az áramforrás által szolgáltatott teljesítmény: $P_{\max} = \frac{I_e^2}{4G_b} = \frac{1}{4} R_b I_e^2$.

A teljesítménytétel: Tellegen tétele

Láttuk, hogy egy stacionárius áramokkal átjárt hurok mentén a feszültségesések (= potenciálkülönbségek) összege nulla. Ez azt is jelenti, hogy a hurok mentén körbevitt elektromos töltés az elektromos mező összességében nulla munkát végez. Ez azonban csak akkor jelenti a hurok menti teljesítmények nullára összegződését is, ha a hurok mentén valamennyi áramköri elem ugyanaz az áram folyik át, vagyis, ha a hurok nem tartalmaz elágazást. Vizsgáljuk most meg, hogy egy tetszőleges hálózat valamennyi kétpólusán együttesen mennyi teljesítmény esik!

Jelöljük a hálózat csomópontjainak számát n -nel! Válasszunk ki tetszőlegesen egy csomópontot, és válasszuk ennek potenciálját nullának. A további $n-1$ darab csomópont potenciálját ehhez viszonyítva adjuk meg. Az egyes csomópontok közötti kétpólusok teljesítményét vegyük sorra, úgy, hogy kiválasztjuk a j . csomópontot, majd a további csomópontokon végighaladva képezzük az $I_{jk} U_{jk} = I_{jk} (\varphi_j - \varphi_k)$ szorzatokat, ahol I_{jk} a j . csomópontból a k . felé elfolyó áram, U_{jk} pedig a j . és k . csomópont között eső feszültség, ami a j . és k . csomópont potenciáljának különbségeként is felírható. (Amelyik csomópontot nem köti össze a j -edikkel kétpólus – pl. az n -ediket –, annál nulla árammal számolunk, vagyis a példa szerint $I_{jn} = 0$.) Az így nyert szorzatokat összegezve megkapjuk mindazon kétpólusok teljesítményét, amelyeknek egyik pólusa a j . csomópontéhoz csatlakozik: $\sum_{k=1}^n I_{jk} (\varphi_j - \varphi_k)$. (Ebből az összegképzésből ugyan értelemeszerűen ki kellene hagyni azt a tagot, amelyre $k = j$, de ha beszámoljuk, azzal nem követünk el hibát, mert $\varphi_j - \varphi_j = 0$, s így a szorzat is nulla, vagyis az összegben nulla járulékot ad.) Valamennyi kétpólust úgy vehetjük sorra, hogy ezt az összeget mindegyik csomópontra elkészítjük (vagyis minden lehetséges j -re elkészítjük, majd az így nyert összegeket is összeadjuk: $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n I_{jk} (\varphi_j - \varphi_k)$. Ekkor viszont minden kétpólus teljesítményét kétszer számoljuk: az egyik pólusánál is egyszer, a másik pólusánál is egyszer. Így a hálózat kétpólusain az összes teljesítmény: $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n I_{jk} (\varphi_j - \varphi_k)$. A kettős összegzést kifejtve:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n I_{jk} (\varphi_j - \varphi_k) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n I_{jk} \varphi_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n I_{jk} \varphi_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \varphi_j \underbrace{\sum_{k=1}^n I_{jk}}_0 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k \underbrace{\sum_{j=1}^n I_{jk}}_0 = 0,$$

ahol kihasználtuk, hogy $\sum_{k=1}^n I_{jk}$ a j . csomópontból elfolyó áramok összege, ami a csomóponti törvény szerint nulla, s hogy $\sum_{j=1}^n I_{jk}$ a k . csomópontba befolyó áramok összege, ami a csomóponti törvény szerint ugyancsak nulla. Ezzel bebizonyítottuk **Tellegen tételét**, amely szerint a zárt hálózatban (abban az értelemben zárt, hogy további hálózatrészekhez nem csatlakozik) a kétpólusok elektromos teljesítményének összege nulla.

Megjegyzés

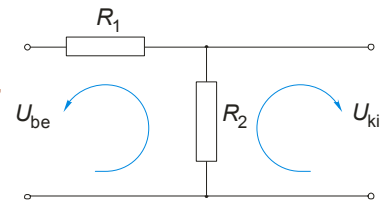
A bizonyításból látszik, hogy kihasználtuk benne a csomóponti törvényt. Kevésbé feltűnően, de kihasználtuk a huroktörvényt is, ti. amikor a csomópontok mindegyikéhez egy önkényesen választott csomópontot viszonyított potenciál-értéket rendeltünk. Ez ugyanis csak akkor egyértelmű, ha az önkényesen kiválasztott csomópontból bármilyen úton jutva az éppen szóbanforgóhoz, az útba eső kétpólusokon eső feszültségek összege ugyanannyinak adódik, ami viszont ekvivalens azzal, hogy zárt hurok mentén a feszültségesések összege nulla. Mindezt figyelembe véve mondhatjuk, hogy Tellegen tétele a huroktörvény és a csomóponti törvény következménye.

Egyszerű lineáris négy-pólusok

Gyakori, hogy valamely áramkör-részletet, mint egy jelátalakító egységet szemléljük: ilyenkor a jel (valamilyen időlefutású feszültség vagy áram) az áramkör egyik részén belép, majd a másikon „átalakulva” kilép. Ennek megfelelően beszélünk az áramkör **bemenetéről**, ill. **kimenetéről**.

Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti négy-pólus kimenőfeszültségét a bemenő feszültség függvényében, felhasználva, hogy a kimeneten nem folyik áram (= terheletlen négy-pólus)!



Megoldás

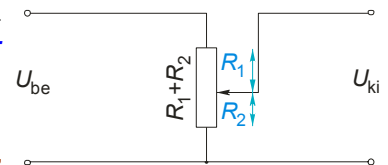
A huroktörvény a bemeneti körre: $U_{be} - IR_1 - IR_2 = 0$. A kimeneti hurokra: $U_{ki} - IR_2 = 0 \Rightarrow I = \frac{U_{ki}}{R_2}$. Ezt az áramot a

bemeneti huroktörvénybe beírva: $U_{be} - (R_1 + R_2) \frac{U_{ki}}{R_2} = 0 \Rightarrow U_{ki} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{be}$. Látjuk, hogy a kimenőfeszültség $\frac{R_2}{R_1 + R_2}$ arányban kisebb, mint a bemenőfeszültség (= **feszültségosztó**).

A bemenő és kimenő feszültség viszonyát az áramkör **feszültségerősítésének** nevezzük: $A_U = \frac{U_{ki}}{U_{be}}$. A feszültségerősítés jellegtelen mennyiség. Az itt bemutatott feszültségosztó erősítése 1-nél kisebb.

Megjegyzés

A feladat szerinti feszültségosztót úgy is el lehet készíteni, hogy az osztásarány folyamatosan változtatható legyen. Azt a feszültségosztót, amelynél R_2 úgy változtatható, hogy közben $R_1 + R_2$ állandó marad, **potencióméternek** nevezzük. Rajzjelét az ábra mutatja. Segítségével a bemenőfeszültség folyamatosan változtathatóan 0% – 100% között osztható le (= **folyamatosan változtatható feszültségosztó**).



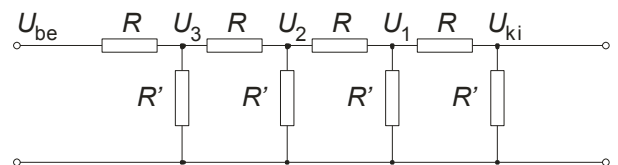
Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti négy-pólus (ún. **létraosztó**) kimenő feszültségét a bemenő feszültség függvényében, felhasználva, hogy a kimeneten nem folyik áram (= terheletlen négy-pólus)!

Megoldás

Alkalmazzuk a csomóponti törvényt rendre az U_{ki} , U_1 , U_2 , U_3 feszültségű csomópontokra:

$$\begin{aligned} -\frac{U_1 - U_{ki}}{R} + \frac{U_{ki}}{R'} &= 0, \\ -\frac{U_2 - U_1}{R} + \frac{U_1 - U_{ki}}{R} + \frac{U_1}{R'} &= 0, \\ -\frac{U_3 - U_2}{R} + \frac{U_2 - U_1}{R} + \frac{U_2}{R'} &= 0, \\ -\frac{U_{be} - U_3}{R} + \frac{U_3 - U_2}{R} + \frac{U_3}{R'} &= 0. \end{aligned}$$



Az egyenleteket az U_1 , U_2 , U_3 , U_{ki} ismeretlenekre rendezve 4 ismeretlenes lineáris, inhomogén egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R'} + \frac{1}{R} \\ 0 & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R'} + \frac{2}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R'} + \frac{2}{R} & -\frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R'} + \frac{2}{R} & -\frac{1}{R} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_3 \\ U_2 \\ U_1 \\ U_{ki} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{U_{be}}{R} \end{pmatrix}.$$

Az egyenletrendszer determinánsát az első sora szerint kifejtve:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R'} + \frac{1}{R} \\ 0 & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R'} + \frac{2}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R'} + \frac{2}{R} & -\frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R'} + \frac{2}{R} & -\frac{1}{R} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{R} \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R'} + \frac{2}{R} & 0 \\ \frac{1}{R'} + \frac{2}{R} & -\frac{1}{R} & 0 \end{vmatrix} - \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R}\right) \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R'} + \frac{2}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R'} + \frac{2}{R} & -\frac{1}{R} \\ \frac{1}{R'} + \frac{2}{R} & -\frac{1}{R} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{R} \frac{3R^2 + 4R'R + R^2}{R^2 R^3} + \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R}\right) (2R' + R) \frac{2R^2 + 4R'R + R^2}{R^3 R^3} = \\ & = \frac{1}{R^4 R^4} (-3R^4 - 4R^3 R - R^2 R^2 + \underbrace{(R' + R)(2R' + R)}_{\frac{2R^2 + R'R + 2R'R + R^2}{3R'R}} (2R^2 + 4R'R + R^2)) = \frac{1}{R^4 R^4} \left(-3R^3 - 4R^2 R - R^2 R^2 + \underbrace{(2R^2 + 3R'R + R^2)(2R^2 + 4R'R + R^2)}_{\frac{4R^4 + 8R^3 R + 2R^2 R^2 + 6R^3 R + 12R^2 R^2 + 3R'R^3 + 2R^2 R^2 + 4R'R^3 + R^4}{4R^4 + 14R^3 R + 16R^2 R^2 + 7R'R^3 + R^4}} \right) = \\ & = \frac{1}{R^4 R^4} \underbrace{(-3R^4 - 4R^3 R - R^2 R^2 + 4R^4 + 14R^3 R + 16R^2 R^2 + 7R'R^3 + R^4)}_{R^4 + 10R^3 R + 15R^2 R^2 + 7R'R^3 + R^4} = \frac{1}{R^4 R^4} (R^4 + 10R^3 R + 15R^2 R^2 + 7R'R^3 + R^4). \end{aligned}$$

Az U_{ki} ismeretlenhez tartozó determináns:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R'} + \frac{2}{R} & 0 \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R'} + \frac{2}{R} & -\frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R'} + \frac{2}{R} & -\frac{1}{R} & 0 & \frac{U_{be}}{R} \end{vmatrix} = -\frac{U_{be}}{R} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{R} \\ 0 & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R'} + \frac{2}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R'} + \frac{2}{R} & -\frac{1}{R} \end{vmatrix} = \frac{1}{R^4} U_{be}.$$

Ezekkel U_{ki} már meghatározható:

$$U_{ki} = \frac{D_{U_{ki}}}{D} = \frac{R^4}{R^4 + 10R^3 R + 15R^2 R^2 + 7R'R^3 + R^4} U_{be}.$$

Feladat

Határozzuk meg az előző feladat szerinti létraosztó bemenetén mérhető ellenállást (= **bemenő ellenállás**)!

Megoldás

Az utolsó fokozat bemenetén mérhető ellenállás

$$R_{be,1} = R + R' = R + \frac{1}{G'},$$

(ahol G' az R' ellenállás vezetése).

A második fokozat bemenetén:

$$R_{be,2} = R + \frac{1}{G' + G_{be,1}} = R + \frac{1}{G' + \frac{1}{R + \frac{1}{G'}}}.$$

A harmadik fokozat bemenetén:

$$R_{be,3} = R + \frac{1}{G' + G_{be,2}} = R + \frac{1}{G' + \frac{1}{R + \frac{1}{G' + \frac{1}{R + \frac{1}{G'}}}}}$$

Hasonlóan a negyedik fokozat bemenetén:

$$R_{be,4} = R + \frac{1}{G' + G_{be,4}} = R + \frac{1}{G' + \frac{1}{R + \frac{1}{G' + \frac{1}{R + \frac{1}{G' + \frac{1}{R + \frac{1}{G'}}}}}}}$$

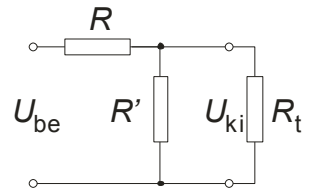
Megjegyzés

A létraosztó bemenő ellenállása ezzel a módszerrel (lánctört formájában) akkor is könnyen meghatározható, ha az egyes fokozatokban szereplő ellenállások különbözőek:

$$R_{be,4} = R_4 + \frac{1}{G'_4 + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{G'_3 + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{G'_2 + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{G'_1}}}}}}}$$

Feladat

Tervezzünk olyan feszültségosztót, amely az R_t terhelésre dolgozva A feszültségerősítést valósít meg, s amelynek bemeneti ellenállása is R_t értékű!



Megoldás

A már tárgyalt feszültségosztót alapul véve a terhelés az osztó R' ellenállásával párhuzamosan van kapcsolva, így az osztásarány (vagyis a feszültségerősítés):

$$A = \frac{\frac{R'R_t}{R'+R_t}}{R + \frac{R'R_t}{R'+R_t}}, \text{ az osztó bemeneti ellenállása pedig } R_t = R + \frac{R'R_t}{R'+R_t}. \text{ Ez az } R \text{ és } R' \text{ ismeretlenekre nézve két egyenletet jelent, amiből } R \text{ és } R' \text{ meghatározható. Az első egyenletből:}$$

$$A = \frac{R'R_t}{RR' + RR_t + R'R_t} \Rightarrow A(RR' + RR_t + R'R_t) = R'R_t.$$

A másodikból:

$$R_t R' + R_t^2 = RR' + RR_t + R'R_t.$$

Ezeket összevetve:

$$R' R_t = A(R_t R' + R_t^2) \Rightarrow R' = \frac{A}{1-A} R_t.$$

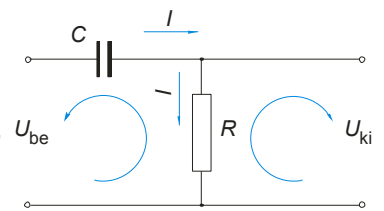
R' értékét a második egyenletbe visszahelyettesítve:

$$R = R_t - \frac{R'R_t}{R'+R_t} = R_t - \frac{\frac{A}{1-A} R_t R_t}{\frac{A}{1-A} R_t + R_t} = R_t - \frac{\frac{A}{1-A} R_t}{\frac{A}{1-A} + 1} = R_t - \frac{A}{A+1-A} R_t = (1-A) R_t.$$

Összefoglalva: $R = (1-A) R_t$ és $R' = \frac{A}{1-A} R_t$.

Megjegyzés

- Mivel ennek az osztónak a bementi ellenállása R_t , ezért nem változtatja meg az osztó működését, ha az R_t terhelés helyére is egy ilyen osztót teszünk! Az ilyen módon kétfokozatúra bővített osztó első fokozatának kimenőfeszültsége: $U_{ki,1} = AU_{be}$, ami egyben a második fokozat bemenőfeszültsége is, így a második fokozat kimenőfeszültsége (ami egyben a teljes osztó kimenőfeszültsége): $U_{ki} = AU_{be,2} = AU_{ki,1} = \underbrace{AA}_{U_{ki,1}}U_{be} = A^2U_{be}$. Ugyanezen gondolatmenet szerint ez az osztó tetszőleges számú további fokozattal bővíthető. n fokozat beépítése után a kimenőfeszültség: $U_{ki} = A^nU_{be}$, vagyis az egymásután kapcsolt fokozatok feszültségerősítése összeszorozódik.
- A bemutatott gondolatmenet szerint általában is igaz, hogy az egymásután kapcsolt négyfólusok feszültségerősítése összeszorozódik, viszont az általában nem igaz, hogy egy négyfólus kimenetére egy újabb négyfólust kapcsolva nem változik meg a feszültségerősítés (hiszen a kimeneten megjelenő újabb négyfólus terhelést jelent, amitől a feszültségerősítés általában függ).
- Gyakran használatos az a speciális eset, amely az $R_t = 2R_0$, és $A = \frac{1}{2}$ értékekhez tartozik. Ekkor $R' = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} 2R_0 = 2R_0$ és $R = \left(1 - \frac{1}{2}\right) 2R_0 = R_0$. Az így megvalósított láncosztót **R – 2R-létrának** hívjuk. Az R – 2R-létra feszültségerősítése $\frac{1}{2^n}$, ahol n a fokozatok száma.



Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti négyfólus kimenőfeszültségét a bemenő feszültség függvényében, felhasználva, hogy a kimeneten nem folyik áram (= terheletlen négyfólus), továbbá, hogy $|U_{ki}| \ll |U_{be}|$!

Megoldás

A huroktörvény a bemeneti körre: $U_{be} - IR - \frac{1}{C} \int I dt' = 0$. A kimeneti hurokra: $U_{ki} - IR = 0 \Rightarrow I = \frac{U_{ki}}{R}$. Ezt az áramot a bemeneti huroktörvénybe beírva:

$$U_{be} - U_{ki} - \frac{1}{RC} \int U_{ki} dt' = 0.$$

Ha $|U_{ki}| \ll |U_{be}|$, akkor $U_{be} - \frac{1}{RC} \int U_{ki} dt' = 0 \Rightarrow \frac{dU_{be}}{dt} = \frac{1}{RC} U_{ki} \Rightarrow U_{ki} = RC \frac{dU_{be}}{dt}$. Az $|U_{ki}| \ll |U_{be}|$ feltétel a kimenőfeszültség behelyettesítésével

$$RC \frac{d|U_{be}|}{dt} \ll |U_{be}| \Rightarrow \frac{d|U_{be}|}{|U_{be}|} \ll \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}, \text{ ahol } \tau = RC \text{ idő jellegű mennyiség – hiszen } [\tau] = \frac{[U_{be}]}{\left[\frac{dU_{be}}{dt}\right]} = \frac{V}{\frac{V}{s}} = s, \text{ az } R - C \text{ kör időállandójának nevezzük. Látjuk,}$$

hogy ha bemenőfeszültség lassan változik (= relatív változási gyorsasága sokkal kisebb, mint a kör időállandójának reciproka), akkor a kimenőfeszültség a bemenőfeszültség deriváltjával arányos, vagyis a négyfólus a bemenőfeszülteget differenciálja (**differenciáló kör**).

Feladat

Határozzuk meg az előző feladatban szereplő áramkör kimenő feszültségét az idő függvényében, ha a bemenetere a $t = 0$ pillanatban belépő U_0 ugrásfeszültséget kapcsolunk!

Megoldás

A huroktörvényt a bemeneti körre felírva: $U_0 - I(t)R - \frac{1}{C} \int I(t') dt' = 0$. Differenciáljuk ezt az összefüggést az idő szerint: $R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0$. Ez $I(t)$ -re nézve

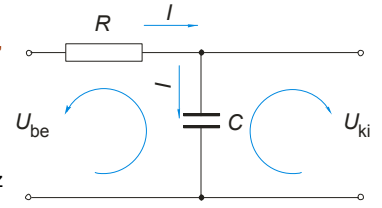
egy elsőrendű differenciálegyenlet, amelynek megoldása $I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$. Az I_0 integrációs konstans értéke – ami a megoldásból kiolvashatóan az áram $t = 0$ -hoz tartozó értéke (mert $I_0 e^{-\frac{0}{RC}} = I_0$) – a huroktörvényből a $t = 0$ érték behelyettesítésével nyerhető: $U_0 - I(t)R - \frac{1}{C} \int_0^0 I(t') dt' = 0 \Rightarrow I_0 = I(0) = \frac{U_0}{R}$. Ennek fel-

$$\text{használásával } I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Az $I(t)$ függvény ismeretében a keresett $U_{ki}(t)$ függvény a kimeneti hurokra felírt huroktörvényből már könnyen meghatározható: $U_{ki}(t) - I(t)R = 0 \Rightarrow U_{ki}(t) = RI(t) = R \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$. Látjuk, hogy a $t = 0$ pillanatban bekövetkező ugrást a négyfólus zavartalanul átviszi ($U_{ki}(0) = U_0$), de az U_0 értéket nem tartja meg, U_{ki} a kör időállandója által megszabott exponenciális ütemben nullára csökken.

Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti négy-pólus kimenő feszültségét a bemenő feszültség függvényében, felhasználva, hogy a kimeneten nem folyik áram (= terheletlen négy-pólus), továbbá, hogy $|U_{ki}| \ll |U_{be}|$!



Megoldás

A huroktörvény a bemeneti körre: $U_{be} - \frac{1}{C} \int_0^t I dt' - IR = 0$. A kimeneti hurokra: $U_{ki} - \frac{1}{C} \int_0^t I dt' = 0 \Rightarrow I = C \frac{dU_{ki}}{dt}$. Ezt az

áramot a bemeneti huroktörvénybe beírva: $U_{be} - U_{ki} - RC \frac{dU_{ki}}{dt} = 0$. Ha $|U_{ki}| \ll |U_{be}|$, akkor $U_{be} - RC \frac{dU_{ki}}{dt} = 0 \Rightarrow U_{ki} = \frac{1}{RC} \int_0^t U_{be} dt'$. Az $|U_{ki}| \ll |U_{be}|$ feltétel a ki-

menő feszültség behelyettesítésével $\frac{1}{RC} \int_0^t |U_{be}| dt' \ll |U_{be}| \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{1}{RC} |U_{be}| \ll \frac{d|U_{be}|}{dt} \Rightarrow \frac{d|U_{be}|}{dt} \gg \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$, ahol $\tau = RC$ az $R-C$ kör **időállandója**. (Itt kihasználtuk,

hogy $\left| \int_0^t U_{be} dt' \right| < \int_0^t |U_{be}| dt'$ vagyis, ha az $\frac{1}{RC} \int_0^t |U_{be}| dt' \ll |U_{be}|$ feltétel teljesül, akkor az $|U_{ki}| \ll |U_{be}|$ feltétel még inkább.) Látjuk, hogy ha bemenő feszültség gyorsan változik (= relatív változási gyorsasága sokkal nagyobb, mint a kör időállandójának reciproka), akkor a kimenő feszültség a bemenő feszültség deriváltjával arányos, vagyis a négy-pólus a bemenő feszültséget integrálja (**integráló kör**).

Feladat

Határozzuk meg az előző feladatban szereplő áramkör kimenő feszültségét az idő függvényében, ha a bementére a $t = 0$ pillanatban belépő U_0 ugrásfeszültséget kapcsolunk!

Megoldás

A bemeneti körre vonatkozóan felírható huroktörvény megegyezik a differenciáló körre felírt alakkal, így az abból $I(t)$ -re nyert megoldás is ugyanaz:

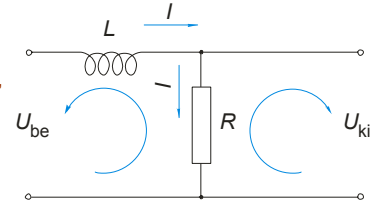
$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Az $I(t)$ függvény ismeretében a keresett $U_{ki}(t)$ függvény a kimeneti hurokra felírt huroktörvényből már könnyen meghatározható: $U_{ki}(t) - \frac{1}{C} \int_0^t I(t') dt' = 0 \Rightarrow$

$U_{ki}(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t'}{RC}} dt' = -\frac{1}{RC} \frac{U_0}{\frac{1}{RC}} e^{-\frac{t'}{RC}} + U_0 = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$. Látjuk, hogy a $t = 0$ pillanatban bekövetkező ugrást a négy-pólus nem viszi át ($U_{ki}(0) = 0$), de a $t = 0$ pillanattól kezdődően U_{ki} növekedni kezd, és az U_0 értéket a kör időállandója által megszabott exponenciális ütemben veszi fel.

Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti négy-pólus kimenő feszültségét a bemenő feszültség függvényében, felhasználva, hogy a kimeneten nem folyik áram (= terheletlen négy-pólus), továbbá, hogy $|U_{ki}| \ll |U_{be}|$!



Megoldás

A huroktörvény a bemeneti körre: $U_{be} - L \frac{dI}{dt} - IR = 0$. A kimeneti hurokra: $U_{ki} - IR = 0 \Rightarrow I = \frac{U_{ki}}{R}$. Ezt az áramot a

bemeneti huroktörvénybe beírva: $U_{be} - \frac{L}{R} \frac{dU_{ki}}{dt} - U_{ki} = 0$. Ha $|U_{ki}| \ll |U_{be}|$, akkor $U_{be} - \frac{L}{R} \frac{dU_{ki}}{dt} = 0 \Rightarrow U_{ki} = \frac{R}{L} \int_0^t U_{be} dt'$. Az $|U_{ki}| \ll |U_{be}|$ feltétel a kimenő feszültség behelyettesítésével

$$\frac{L}{R} \int_0^t |U_{be}| dt' \ll |U_{be}| \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{L}{R} |U_{be}| \ll \frac{d|U_{be}|}{dt} \Rightarrow \frac{d|U_{be}|}{dt} \gg \frac{L}{R} = \frac{1}{\tau},$$

ahol $\tau = \frac{R}{L}$ az $R-L$ kör **időállandója**. (Itt kihasználtuk, hogy $\left| \int_0^t U_{be} dt' \right| < \int_0^t |U_{be}| dt'$ vagyis, ha az $\frac{1}{R} \int_0^t |U_{be}| dt' \ll |U_{be}|$ feltétel teljesül, akkor az $|U_{ki}| \ll |U_{be}|$ feltétel

még inkább.) Látjuk, hogy ha bemenő feszültség gyorsan változik (= relatív változási gyorsasága sokkal nagyobb, mint a kör időállandójának reciproka), akkor a kimenő feszültség a bemenő feszültség integráljával arányos, vagyis a négy-pólus a bemenő feszültséget integrálja (**integráló kör**).

Feladat

Határozzuk meg az előző feladatban szereplő áramkör kimenő feszültségét az idő függvényében, ha a bementére a $t = 0$ pillanatban belépő U_0 ugrásfeszültséget kapcsolunk!

Megoldás

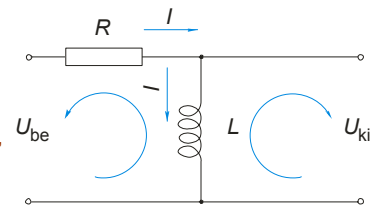
A huroktörvényt a bemeneti körre felírva: $U_0 - I(t)R - L \frac{dI(t)}{dt} = 0$. Ez $I(t)$ -re nézve egy elsőrendű, inhomogén differenciálegyenlet, amely homogén részének

megoldása $I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$. Az I_0 integrációs konstans értékét az inhomogén egyenletbe való visszahelyettesítéssel határozzuk meg, kihasználva, hogy a $t = 0$

pillanatban az áram értéke a feladat feltételei szerint 0: $U_0 = L \frac{dI(t)}{dt} \Big|_{t=0} = -\underbrace{I_0}_{\neq} \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} = -I_0 R \Rightarrow I_0 = -\frac{U_0}{R} \Rightarrow I(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$. Az inhomogén egyenlet megoldását $I(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t} + I^*$ alakban keressük, és ismét kihasználjuk, hogy $I(0) = 0$, amiből $I^* = \frac{U_0}{R}$ adódik. Ennek felhasználásával $I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

Az $I(t)$ függvény ismeretében a keresett $U_{ki}(t)$ függvény a kimeneti hurokra felírt huroktörvényből már könnyen meghatározható: $U_{ki}(t) - I(t)R = 0 \Rightarrow$

$U_{ki}(t) = RI(t) = R \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. Látjuk, hogy a $t = 0$ pillanatban bekövetkező ugrást a négy pólus nem viszi át ($U_{ki}(0) = 0$), de a $t = 0$ pillanattól kezdődően U_{ki} növekedni kezd, és az U_0 értéket a kör időállandója által megszabott exponenciális ütemben veszi fel.



Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti négy pólus kimenő feszültségét a bemenő feszültség függvényében, felhasználva, hogy a kimeneten nem folyik áram (= terheletlen négy pólus), továbbá, hogy $|U_{ki}| \ll |U_{be}|$!

Megoldás

A huroktörvény a bemeneti körre: $U_{be} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0$. A kimeneti hurokra: $U_{ki} - L \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow I = \frac{1}{R} \int U_{ki} dt'$. Ezt az áramot a bemeneti huroktörvénybe beírva:

$U_{be} - U_{ki} - \frac{L}{R} \int U_{ki} dt' = 0$. Ha $|U_{ki}| \ll |U_{be}|$, akkor $U_{be} - \frac{L}{R} \int U_{ki} dt' = 0 \Rightarrow U_{ki} = \frac{R}{L} \frac{dU_{be}}{dt}$. Az $|U_{ki}| \ll |U_{be}|$ feltétel a kimenő feszültség behelyettesítésével

$\frac{L}{R} \frac{d|U_{be}|}{dt} \ll |U_{be}| \Rightarrow \frac{L}{R} |U_{be}| \ll \frac{d|U_{be}|}{dt} \Rightarrow \frac{d|U_{be}|}{|U_{be}|} \ll \frac{L}{R} = \frac{1}{\tau}$, ahol $\tau = \frac{R}{L}$ az $R-L$ -kör **időállandója**. Látjuk, hogy ha bemenő feszültség lassan változik (= relatív

változási gyorsasága sokkal kisebb, mint a kör időállandójának reciproka), akkor a kimenő feszültség a bemenő feszültség deriváltjával arányos, vagyis a négy pólus a bemenő feszültséget differenciálja (**differenciáló kör**).

Feladat

Határozzuk meg az előző feladatban szereplő áramkör kimenő feszültségét az idő függvényében, ha a bementére a $t = 0$ pillanatban belépő U_0 ugrásfeszültséget kapcsolunk!

Megoldás

A bemeneti körre vonatkozóan felírható huroktörvény megegyezik az integráló körre felírt alakkal, így az abból $I(t)$ -re nyert megoldás is ugyanaz:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Az $I(t)$ függvény ismeretében a keresett $U_{ki}(t)$ függvény a kimeneti hurokra felírt huroktörvényből már könnyen meghatározható: $U_{ki}(t) - L \frac{dI(t)}{dt} = 0 \Rightarrow$

$U_{ki}(t) = L \frac{d}{dt} \left(\frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \right) = \underbrace{U_0}_{\neq} \frac{R}{R} \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} = U_0 e^{-\frac{R}{L}t}$. Látjuk, hogy a $t = 0$ pillanatban bekövetkező ugrást a négy pólus zavartalanul átviszi ($U_{ki}(0) = U_0$), de az U_0 értéket nem tartja meg, U_{ki} a kör időállandója által megszabott exponenciális ütemben nullára csökken.

Sokpólusok

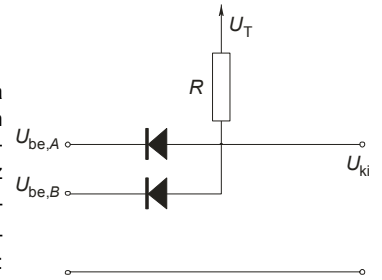
Logikai kapuk

Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti (terheletlen) áramkör kimenőfeszültségét annak függvényében, hogy a bemeneteken a 0, ill. az $U_T (\gg U_{ny})$ feszültség jelenik meg!

Megoldás

Ha mindkét bemenet az U_T feszültségre van kapcsolva, akkor a bármelyik diódát és az ellenállást tartalmazó hurokra alkalmazott huroktörvény szerint az ellenálláson átfolyó áram nullának adódik, s így mindkét dióda lezárt állapotban van, az ellenálláson eső feszültség nulla, vagyis a kimenőfeszültség U_T -vel egyenlő. Ha bármelyik bemenetre 0 feszültséget kapcsoljuk, az a megfelelő diódát nyitó irányban feszíti elő, és mert $U_T > U_{ny}$, nyitott állapotba is vezérli. Ez azt jelenti, hogy a diódán U_{ny} feszültség esik, tehát ennyi a kimenőfeszültség is. Ekkor a másik dióda, amelynek a katódjára U_T feszültségen van, záró irányban van előfeszítve, tehát rajta áram nem folyik. Ha mindkét bemenetre 0 feszültséget kapcsolunk, akkor mindkét dióda nyitott állapotban van, de a kimenő feszültség ekkor is U_{ny} . Összegezve:



a kimeneten csak akkor jelenik meg U_T feszültség, ha mindkét bemenetre is U_T feszültség van kapcsolva, a kimenőfeszültség minden más esetben U_{ny} , amit az $U_T \gg U_{ny}$ feltétel miatt $- U_T$ -hez viszonyítva – jó közelítéssel 0-nak is tekinthetünk.

A kimenőfeszültség függését a bemenőfeszültségektől áttekintő táblázatba foglalva láthatjuk, hogy ez az áramkör a logikai ÉS műveletet valósítja meg, amennyiben a logikai 0 értéknek az U_{ny} -nél kisebb feszültségeket (elvi értéként a 0-t), logikai 1 értéknek pedig $U_T - U_{ny}$ -nél nagyobb feszültségeket (elvi értéként az U_T feszültség szintet) feleltetjük meg:

$U_{be,A}$	$U_{be,B}$	U_{ki}
0	0	0
0	U_T	0
U_T	0	0
U_T	U_T	$U_T - U_{ny}$

A	B	A ÉS B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Megjegyzés

– A diódákkal megvalósított **ÉS-kapu** hátránya, hogy a logikai 1-állapotba vezérelve a tápfeszültség 0 szintje felé nem (vagy csak igen kis mértékben) terhelhető, mert ekkor a kimenet és a 0-szint közé bekötött terhelő ellenállás a kapuáramkör szerves részét képező R értékű ellenállással feszültségosztót képez, s így a kimenőfeszültség $\frac{R_t}{R + R_t} U_T$ -nek adódik, ami a kívánatos $U_T - U_{ny}$ -nél kisebb lehet, ti. ha $R_t < R \frac{U_{ny}}{U_T - U_{ny}}$.

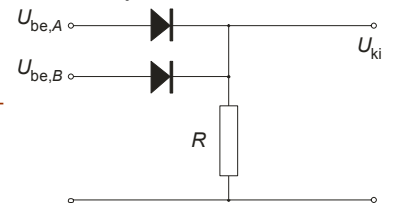
– A diódákkal megvalósított **ÉS-kapu** bemeneteinek számát tetszőlegesen megnövelhetjük a működés megváltozása nélkül újabb diódák azonos módon történő bekötésével.

Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti (terheletlen) áramkör kimenőfeszültségét annak függvényében, hogy a bemeneteken a 0, ill. az $U_T (\gg U_{ny})$ feszültség jelenik meg!

Megoldás

Ha mindkét bemenet 0 feszültségre van kapcsolva, akkor a bármelyik diódát és az ellenállást tartalmazó hurokra alkalmazott huroktörvény szerint az ellenálláson átfolyó áram nullának adódik, s így mindkét dióda lezárt állapotban van, az ellenálláson eső feszültség nulla, vagyis a kimenőfeszültség is 0. Ha bármelyik bemenetre U_T feszültséget kapcsoljuk, az a megfelelő diódát nyitó irányban feszíti elő, és mert $U_T > U_{ny}$, nyitott állapotba is vezérli. Ez azt jelenti, hogy a diódán U_{ny} feszültség esik, tehát ennyi a kimenőfeszültség $U_T - U_{ny}$. Ekkor a másik dióda, amelynek az anódja 0 feszültségen van, záró irányban van előfeszítve, tehát rajta áram nem folyik. Ha mindkét bemenetre U_T feszültséget kapcsolunk, akkor mindkét dióda nyitott állapotban van, de a kimenő feszültség ekkor is $U_T - U_{ny}$. Összegezve: a kimeneten csak akkor jelenik meg 0 feszültség, ha mindkét bemenetre is 0 feszültség van kapcsolva, a kimenőfeszültség minden más esetben $U_T - U_{ny}$, amit az $U_T \gg U_{ny}$ feltétel miatt jó közelítéssel U_T -nek is tekinthetünk.



A kimenőfeszültség függését a bemenőfeszültségektől áttekintő táblázatba foglalva láthatjuk, hogy ez az áramkör a logikai VAGY műveletet valósítja meg, amennyiben a logikai 0 értéknek az U_{ny} -nél kisebb feszültségeket (elvi értéként a 0-t), logikai 1 értéknek pedig $U_T - U_{ny}$ -nél nagyobb feszültségeket (elvi értéként az U_T feszültség szintet) feleltetjük meg:

$U_{be,A}$	$U_{be,B}$	U_{ki}
0	0	0
0	U_T	$U_T - U_{ny}$
U_T	0	$U_T - U_{ny}$
U_T	U_T	$U_T - U_{ny}$

A	B	A VAGY B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Megjegyzés

- A diódákkal megvalósított **VAGY-kapu** hátránya, hogy a logikai 0-állapotba vezérelve a tápfeszültség U_T szintje felé nem (vagy csak igen kis mértékben) terhelhető, mert ekkor a kimenet és az U_T -szint közé bekötött terhelő ellenállás a kapuáramkör szerves részét képező R értékű ellenállással feszültségszót képez, s így a kimenőfeszültség $\frac{R}{R+R_t}U_T$ -nek adódik, ami a kívánatos U_{ny} -nél nagyobb lehet, ti. ha $R_t < R \frac{U_T - U_{ny}}{U_{ny}}$.
- A diódákkal megvalósított VAGY-kapu bemeneteinek számát tetszőlegesen megnövelhetjük a működés megváltozása nélkül újabb diódák azonos módon történő bekötésével.

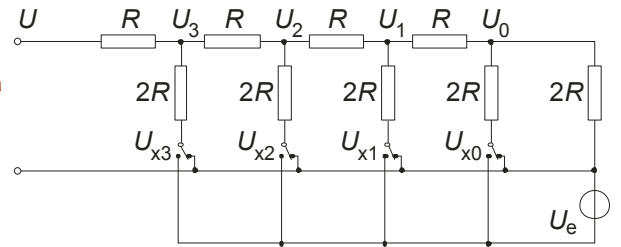
Egy speciális sokpólus: digitál-analóg konverter

Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti hálózat (ún. $R-2R$ -létra) U -val jelölt kimenőfeszültségét a kapcsolók állásának függvényeként!

Megoldás

Az U_3, U_2, U_1, U_0 potenciálú csomópontokra Kirchhoff I. törvényét rendre felírva:



$$\begin{aligned} \frac{U-U_3}{R} + \frac{U_{x,3}-U_3}{2R} + \frac{U_2-U_3}{R} &= 0, \\ \frac{U_3-U_2}{R} + \frac{U_{x,2}-U_2}{2R} + \frac{U_1-U_2}{R} &= 0, \\ \frac{U_2-U_1}{R} + \frac{U_{x,1}-U_1}{2R} + \frac{U_0-U_1}{R} &= 0, \\ \frac{U_1-U_0}{R} + \frac{U_{x,0}-U_0}{2R} + \frac{0-U_0}{2R} &= 0, \end{aligned}$$

ahol $U_{x,0}, U_{x,1}, U_{x,2}, U_{x,3}$ értéke U_e vagy 0, aszerint, hogy a megfelelő kapcsoló melyik állásban áll. Kihasználva, hogy a kimenet terheletlen, $U - U_3 = 0 \Rightarrow U = U_3$ adódik, s így a fenti egyenletek egy 4 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer alkotnak:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}\right)U_3 + \frac{1}{R}U_2 &= -\frac{1}{2R}U_{x,3}, \\ \frac{1}{R}U_3 - \left(\frac{1}{2R} + \frac{2}{R}\right)U_2 + \frac{1}{R}U_1 &= -\frac{1}{2R}U_{x,2}, \\ \frac{1}{R}U_2 - \left(\frac{1}{2R} + \frac{2}{R}\right)U_1 + \frac{1}{R}U_0 &= -\frac{1}{2R}U_{x,1}, \\ \frac{1}{R}U_1 - \left(\frac{2}{2R} + \frac{1}{R}\right)U_0 &= -\frac{1}{2R}U_{x,0}. \end{aligned}$$

Elvégezve a lehetséges összevonásokat a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2R}U_3 + \frac{1}{R}U_2 &= -\frac{1}{2R}U_{x,3}, \\ \frac{1}{R}U_3 - \frac{5}{2R}U_2 + \frac{1}{R}U_1 &= -\frac{1}{2R}U_{x,2}, \\ \frac{1}{R}U_2 - \frac{5}{2R}U_1 + \frac{1}{R}U_0 &= -\frac{1}{2R}U_{x,1}, \\ \frac{1}{R}U_1 - \frac{2}{R}U_0 &= -\frac{1}{2R}U_{x,0}. \end{aligned}$$

Ez egy 4 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer, amelynek U_3 -ra vonatkozó megoldását a Cramer-szabály alapján állíthatjuk elő. Az egyenletrendszer determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2R} & \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & -\frac{5}{2R} & \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & -\frac{5}{2R} & \frac{1}{R} \\ 0 & 0 & \frac{1}{R} & -\frac{2}{R} \end{vmatrix} = \frac{1}{16R^4} \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{16R^4} \left(\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{16R^4} \left(\underbrace{-3(-100+16+20)}_{-64} - 2 \underbrace{(40-8)}_{-64} \right) = \frac{128}{16R^4} = \frac{8}{R^4}.$$

Az U_3 változóhoz tartozó determináns:

$$D_{U_3} = \begin{vmatrix} \frac{U_{x,3}}{2R} & \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ \frac{U_{x,2}}{2R} & -\frac{5}{2R} & \frac{1}{R} & 0 \\ \frac{U_{x,1}}{2R} & \frac{1}{R} & -\frac{5}{2R} & \frac{1}{R} \\ \frac{U_{x,0}}{2R} & 0 & \frac{1}{R} & -\frac{2}{R} \end{vmatrix} = -\frac{1}{16R^4} \begin{vmatrix} U_{x,3} & 2 & 0 & 0 \\ U_{x,2} & -5 & 2 & 0 \\ U_{x,1} & 2 & -5 & 2 \\ U_{x,0} & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{16R^4} \left(\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ U_{x,2} & 2 & 0 \\ U_{x,1} & -5 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} U_{x,2} & 2 & 0 \\ U_{x,1} & -5 & 2 \\ U_{x,0} & 2 & -4 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -\frac{1}{16R^4} \left(\underbrace{U_{x,3}(-100+16+20)}_{-64} - 2(20U_{x,2} + 4U_{x,0} + 8U_{x,1} - 4U_{x,2}) \right) = \frac{1}{16R^4} (64U_{x,3} + 32U_{x,2} + 16U_{x,1} + 8U_{x,0}) = \frac{1}{R^4} \left(4U_{x,3} + 2U_{x,2} + U_{x,1} + \frac{1}{2}U_{x,0} \right).$$

D_{U_3} és D ismeretében U_3 értéke:

$$U_3 = \frac{D_{U_3}}{D} = \frac{\frac{1}{R^4} \left(4U_{x,3} + 2U_{x,2} + U_{x,1} + \frac{1}{2}U_{x,0} \right)}{\frac{8}{R^4}} = \frac{1}{2}U_{x,3} + \frac{1}{4}U_{x,2} + \frac{1}{8}U_{x,1} + \frac{1}{16}U_{x,0}.$$

A megoldás elején tett megállapítás szerint ugyanennyi a terheletlen hálózat kimenő feszültsége is:

$$U = \frac{1}{2}U_{x,3} + \frac{1}{4}U_{x,2} + \frac{1}{8}U_{x,1} + \frac{1}{16}U_{x,0}.$$

Az eredmény általánosítható n bemenetű áramkörre: $U = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U_{x,k}}{2^{n-k}}$, ahol $U_{x,k}$ értéke 0, ill. U_e , aszerint, hogy a k . kapcsoló melyik állásban van.

Megjegyzés

A digitális áramkörök kimenetén 0V vagy 5V jelenik meg, aszerint, hogy a kimenet logikai 0 vagy logikai 1 állapotban van. Ennek alapján az $R-2R$ -létra kapcsolóinak helyére közvetlenül a digitális áramkör kimeneteit köthetjük, s így a digitális áramkör kimenetein megjelenő bináris számmal arányos kimenő feszültség jelenik meg.

Feladat

Határozzuk meg az $R-2R$ -létra n . csomópontjától jobbra eső hálózat eredő ellenállását!

Megoldás

Kezdjük az utolsó csomóponttól jobbra eső hálózat eredő ellenállásának meghatározásával:

$$R_1 = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R.$$

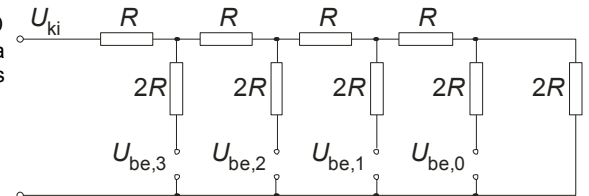
Ennek ismeretében a 2. csomóponttól jobbra eső hálózat eredő ellenállása:

$$R_2 = \frac{(R + R_1)2R}{R + R_1 + 2R} = \frac{(R + R)2R}{R + R + 2R} = R.$$

Hasonlóan határozható meg tovább balra haladva a további csomópontoktól jobbra eső hálózat eredő ellenállása:

$$R_3 = \frac{(R + R_2)2R}{R + R_2 + 2R} = \frac{(R + R)2R}{R + R + 2R} = R, \dots, R_n = \frac{(R + R_{n-1})2R}{R + R_{n-1} + 2R} = \frac{(R + R)2R}{R + R + 2R} = R.$$

Látjuk, hogy az $R-2R$ létra minden csomópontjától a jobbra eső hálózatrész R eredő ellenállást képvisel (függetlenül az $R-2R$ „fokozatok” számától). Ez azt jelenti, hogy a „fokozatok” száma tetszés szerint növelhető a működés jellegének megváltozása nélkül. Az előző feladat eredményére vonatkozóan ez azt jelenti, hogy az n fokozatú $R-2R$ -létra kimenő feszültsége: $U = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U_{x,k}}{2^{n-k}}$, ahol $U_{x,k}$ értéke 0, ill. U_e aszerint, hogy a k . kapcsoló melyik állásban van, vagyis az n fokozatú $R-2R$ -létra n digites (= n számjegyű) digitál-analóg-konverterként alkalmazható.

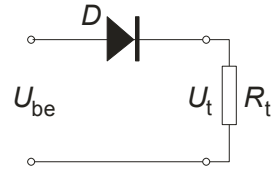


Nem lineáris négyfázisok

Egyenirányítók

Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti négyfázis terhelésén eső feszültséget a bemenőfeszültség függvényében!



Megoldás

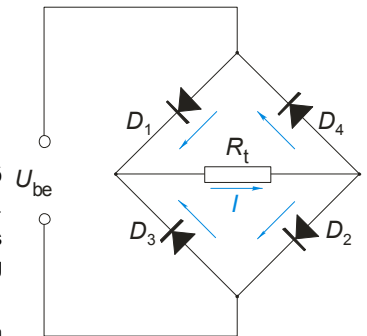
Alkalmazzuk az áramkörre a huroktörvényt: $U_{be} - U_D - U_t = 0 \Rightarrow U_{be} = U_D + U_t$, ahol U_D a diódán eső feszültség, U_t pedig a terhelésen eső feszültség. Feltételezve, hogy van olyan bemenőfeszültség, amely mellett $U_t = 0$, $U_{be} = U_D$ adódik, ami a dióda karakterisztikájából kiolvashatóan az $U_{be} = U_D < U_{ny}$ bemenőfeszültség mellett állhat fenn. Ekkor – ugyancsak a dióda karakterisztikájából kiolvashatóan – a diódán átfolyó áram 0 (a dióda lezárt állapotban van), ami összhangban áll az $U_t = 0$ feltételezéssel (hiszen a terhelésen ugyanaz az áram folyik át, ami a diódán), tehát az $U_{be} < U_{ny}$ feltétel teljesülése esetén ez az állapot ténylegesen meg is valósul. Ha $U_{be} \geq U_{ny}$, akkor az előbbiek szerint a dióda nem lehet lezárt állapotban, így a rajta eső feszültség a karakterisztikából kiolvashatóan $U_D = U_{ny}$, s így $U_{be} = U_{ny} + U_t \Rightarrow U_t = U_{be} - U_{ny}$.

Megjegyzés

- Ha a bemenőfeszültség a dióda nyitófeszültségénél sokkal nagyobb (ami a gyakorlatban alkalmazott diódák $\sim 0,6 \text{ V} - 0,7 \text{ V}$ -os nyitófeszültségét, az alkalmazások nagy részben jól teljesül), mondhatjuk, hogy a terhelésre a bemenőfeszültség jut. Fogalmazhatunk úgy, hogy a pozitív bemenő feszültséget a dióda „rákapcsolja” a terhelésre, negatív bemenőfeszültséget pedig „lekapcsolja” róla.
- Az előbbi megjegyzés szerint, ha a bemenetre váltakozva kapcsolunk pozitív, ill. negatív polaritású feszültséget, akkor a terhelésen csak abban az időszakokban jelenik meg a bemenőfeszültség, amikor a bemenőfeszültség pozitív. Ebből fakadóan ezt a kapcsolást **egyoldalas egyenirányító**nak szokás nevezni.

Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti négyfázis terhelésén eső feszültséget a bemenőfeszültség függvényében!



Megoldás

Ha $U_{be} > 0$, és $U_{be} > 2U_{ny}$, akkor a nyitóirányban álló D_1 és D_2 diódák az előző feladat megoldása szerint vezető állapotban vannak, a terhelésen eső feszültség $U_t = U_{be} - 2U_{ny}$, és a terhelésen az ábrán bejelölt irányú áram folyik át. Ugyanez a D_3 és D_4 diódák záróirányban vannak előfeszítve, így rajtuk áram nem folyik. Ha $U_{be} < 0$, és $U_{be} < -2U_{ny}$, akkor a $D_3 - D_4$ diódák vannak nyitott állapotban, és a terhelésen ilyenkor is $U_t = U_{be} - 2U_{ny}$ feszültség esik, és a terhelésen ekkor is az ábrán bejelölt irányú áram folyik át, a $D_1 - D_2$ diódák pedig lezárt állapotban vannak.

Összefoglalva: Ha $|U_{be}| \geq 2U_{ny}$, akkor $U_t = |U_{be}| - 2U_{ny}$, mégpedig a bemenőfeszültség polaritásától függetlenül. Ha $|U_{be}| < 2U_{ny}$, akkor $U_t = 0$.

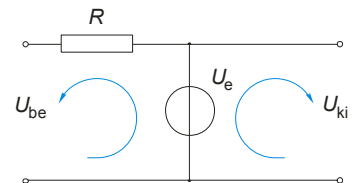
Megjegyzés

- Tekintettel arra, hogy ebben az áramkörben a terhelésen váltakozó polaritású bemenőfeszültség mellett is mindig azonos polaritással jelenik meg a bemenőfeszültség, ezt a kapcsolást **kétoldalas egyenirányító**nak nevezzük. Elterjedten használatos még a **Grätz-híd** megnevezés is.
- Ezt az áramkört a váltófeszültségek egyenirányítása mellett (amit részletesen a váltóáramoknál tárgyalunk majd) gyakran használják pl. a polaritásérzékeny eszközök tápfeszültségcsatlakoztatásánál: a telepet a bemenetre kapcsolják, a védendő eszközt pedig a terhelés helyére, így aztán bármilyen polaritással kötik is be a telepet, az eszközre mindig helyes polaritással kapcsolódik a tápfeszültség.
- Az áramkör hátrányaként szokás említeni, hogy a bemenetének és a kimenetének nincs ún. **közös pontja** (nulla ellenállású vezetővel összekötött pontja), ami a gyakorlatban alkalmazott négyfázisok nagy részénél – s így például az egyoldalas egyenirányítónál is – megtalálható.

Feszültségstabilizátorok

Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti (terheletlen) négyfázis kimenőfeszültségét a bemenőfeszültség függvényében!



Megoldás

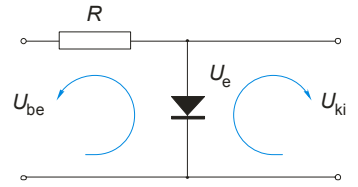
Alkalmazzuk a huroktörvényt a kimeneti hurokra: $U_{ki} - U_k = 0 \Rightarrow U_{ki} = U_k$, ahol U_k a feszültséggenerátor kapocsfeszültsége. Ideális feszültséggenerátort feltételezve a kimenőfeszültség tehát az elektromotoros erővel azonos, ami azt jelenti, hogy a kimenőfeszültség a bemenőfeszültségtől független. Véges belsőellenállású feszültséggenerátort feltételezve a bemeneti körre vonatkozó huroktörvény szerint: $U_{be} - U_k - I_{be} R_b - I_{be} R = 0$. A feszültséggenerátor karakte-

risztikája szerint $U_{ki} = U_k = U_e - I_{be}R_b$, és így $U_{be} - \underbrace{(U_e - I_{be}R_b)}_{U_k} - I_{be}R = 0 \Rightarrow U_{ki} = U_k = U_e + \frac{U_{be} - U_e}{\frac{R}{I_{be}}} R_b = U_e + (U_{be} - U_e) \frac{R_b}{R}$. Ha $R_b \ll R \Rightarrow \frac{R_b}{R}(U_{be} - U_e) \ll U_e$,

s így $U_{ki} = U_e$ a bemenő feszültségtől függetlenül.

Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti (terheletlen) négyfólus kimenőfeszültségét a bemenőfeszültség függvényében!

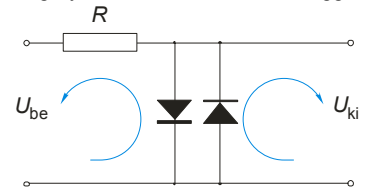


Megoldás

Ha a bemenőfeszültség pozitív (vagyis a diódát nyitó irányban feszíti elő), akkor a nyitott dióda feszültséggenerátor-jellege miatt az áramkör működése megegyezik az előző feladatban tárgyalt áramkör működésével, ahol a feszültséggenerátor elektromotoros ereje a dióda nyitófeszültségével egyenlő, belső ellenállása pedig a nyitott állapotú dióda ellenállásával, tehát $U_{ki} = U_{ny}$, azaz az áramkör **feszültségstabilizátor**ként működik. A nyitófeszültségnél kisebb bemenőfeszültség mellett a dióda szakadásként viselkedik, így a kimenőfeszültség ilyenkor a bemenőfeszültséggel egyenlő.

Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti (terheletlen) négyfólus kimenőfeszültségét a bemenőfeszültség függvényében!



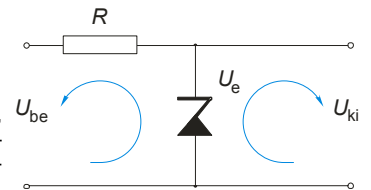
Megoldás

Ennek az áramkörnek a működése megegyezik az előző feladatban tárgyaltával, azzal az értelemszerű különbséggel, hogy a bemenőfeszültség bármilyen polaritása nyitófeszültséget jelent valamelyik dióda számára, így ha $|U_{be}| \geq U_{ny}$, akkor $U_{ki} = \frac{U_{be}}{\text{sign}(U_{be})} U_{ny}$, vagyis az áramkör

polaritásfüggetlen feszültségstabilizátorként működik. Ha $|U_{be}| < U_{ny}$, akkor mindkét dióda szakadásként viselkedik, így $U_{ki} = U_{be}$.

Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti (terheletlen) négyfólus kimenőfeszültségét a bemenőfeszültség függvényében!



Megoldás

Ennek az áramkörnek a működése megegyezik a közösleges diódával felépített feszültségstabilizátor működésével, azzal az értelemszerű különbséggel azonban, hogy a pozitív bemenőfeszültség a diódának záróirányú előfeszítést jelent, így a dióda csak a Zener-feszültség tartományában kezd feszültségstabilizátorként működni, vagyis pozitív bemenőfeszültségre a Zener-feszültségre stabilizál, negatív bemenőfeszültségre viszont a dióda nyitófeszültségére.

Feladat

Vizsgáljuk meg, mekkora kimeneti terhelő áram mellett kezd a korábbi feladatokban szereplő, diódás feszültségstabilizátorok kimenőfeszültsége csökkenni!

Megoldás

A csomóponti törvény szerint: $I_{be} = I_D + I_{ki}$, ahol I_D a diódán átfolyó áram. Írjuk fel ennek ismeretében a huroktörvényt a bemeneti körre: $U_{be} - U_D - (I_D + I_{ki})R = 0 \Rightarrow I_D = \frac{U_{be} - U_D}{R} - I_{ki}$, ahol U_D a diódán eső feszültség (ami a stabilizátor felépítésétől függően a dióda nyitófeszültsége, vagy a Zener-feszültsége). Állandó bemenőfeszültség mellett az $\frac{U_{be} - U_D}{R}$ érték egy jól meghatározott konstans áramot jelent (a diódán nulla kimenő áram mellett átfolyó áramot), így a kimenő áramot növelve I_D értéke előbb-utóbb nullává válik, és ezzel a dióda átbillen a lezárt állapotba, vagyis a dióda szakadásként kezd viselkedni, a feszültségstabilizálás megszűnik. A felírt összefüggésből kiolvasható, hogy ez $I_{ki} = \frac{U_{be} - U_D}{R}$ értékű kimeneti áram mellett következik be. Ilyenkor az áramkör kimenőfeszültsége $U_{ki} = U_{be} - I_{ki}R$.

Feladat

Határozzuk meg, mennyi a diódás feszültségstabilizátor belsőellenállása, ha a dióda karakterisztikájából kiolvashatóan a dióda nyitott állapotban R_{ny} értékű ellenállást képvisel!

Megoldás

Az előző feladat megoldásának gondolatmenetét követhetjük, azzal a különbséggel, hogy a diódán nyitott állapotban eső feszültség most nem konstans, hanem a karakterisztikából kiolvashatóan $U_D = U_{ny} + I_D R_{ny}$, amiből a dióda árama: $I_D = \frac{U_D - U_{ny}}{R_{ny}}$. Ennek megfelelően a bemenetre felírt huroktörvény most

$$U_{be} - U_D - \left(\underbrace{\frac{U_D - U_{ny}}{R_{ny}} + I_{ki}}_{I_D} \right) R = 0 \Rightarrow U_{be} - U_D \left(1 + \frac{R}{R_{ny}} \right) + U_{ny} \frac{R}{R_{ny}} - I_{ki} R = 0. \text{ A kimenetre felírt huroktörvény szerint } U_{ki} = U_D, \text{ s így}$$

$$U_{ki} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_{ny}}} U_{be} + \frac{\frac{R}{R_{ny}}}{1 + \frac{R}{R_{ny}}} U_{ny} - I_{ki} \frac{R}{1 + \frac{R}{R_{ny}}}.$$

A feszültségforrás belső ellenállása a Thèvenin-féle helyettesítés értelmében

$$U_{ki} = U_e - I_{ki} R_b \Rightarrow R_b = - \frac{\partial U_{ki}}{\partial I_{ki}} = \frac{R}{1 + \frac{R}{R_{ny}}} = \frac{R R_{ny}}{R_{ny} + R} = \frac{R_{ny}}{1 + \frac{R_{ny}}{R}},$$

azaz a feszültségstabilizátor belső ellenállása a dióda nyitóirányú ellenállásánál – bár elnyagolható mértékben (l. a megjegyzésben), de – kisebb.

Megjegyzés

Ebből a megfontolásból kiolvasható az is, hogy a nyitott állapotban véges ellenállásként viselkedő dióda a bemenő feszültség változásával szemben sem tartja tökéletesen stabilan a kimenőfeszültséget. Erre jellemző adat az ún. **stabilizálási tényező**: $s = \frac{\partial U_{be}}{\partial U_{ki}}$ (ami U_{ki} , U_{be} változásával szembeni állandósága mellett értelemszerűen ∞ -nek adódik). A diódás stabilizátor esetében

$$s = \frac{\partial U_{be}}{\partial U_{ki}} = \frac{1}{\frac{\partial U_{ki}}{\partial U_{be}}} = 1 + \frac{R}{R_{ny}} \approx \frac{R}{R_{ny}}.$$

Az itt használt közelítést az teszi megengedhetővé, hogy az áramköri paramétereket úgy szokás megválasztani – éppen az elegendően nagy stabilitási tényező elérése érdekében –, hogy $R \gg R_{ny}$ teljesüljön.

Négy-pólus-elmélet

Igen gyakori, hogy valamely áramkör két bemeneti és két kimeneti csatlakozáson keresztül kapcsolódik a további áramkörökhöz (= **négy-pólus**). Ilyenkor a négy-pólus működésének tárgyalása a két bemeneti (U_{be} , I_{be}) és a két kimeneti (U_{ki} , I_{ki}) mennyiség kapcsolatának elemzésével végezhető.

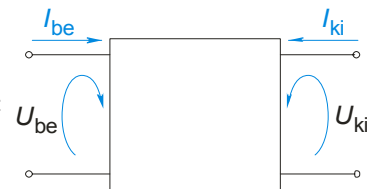
Megjegyzés

A négy-pólusokkal kapcsolatban gyakran fogjuk emlegetni az **impedancia** és az **admittancia** fogalmát. Ohmikus karakterisztikájú áramköri elemekre az impedancia egyszerűen az ellenállást jelenti, az admittancia pedig a vezetőképességet. Váltóáramú körökben azonban az impedancia és az admittancia nem csak ohmikus karakterisztikájú elemekre fogjuk értelmezni, így ezekre vonatkoztatva kicsit más fognak jelenteni, mint az ellenállás, ill. a vezetés. Most, amikor ohmikus karakterisztikájú áramköri elemekre fogalmazzuk meg a négy-pólusokra vonatkozó megállapításainkat, mondhatnánk ezek helyett minden esetben ellenállást, illetve vezetést, de nem tesszük, hogy ezek az összefüggések ne az ellenállás és a vezetés fogalmával rögzüljenek, mert a következőkben a négy-pólusokról elmondottak maradéktalanul érvényesek maradnak majd váltóáramú gerjesztések mellett is, de csak impedanciával, ill. admittanciával megfogalmazva.

Átviteli függvény

Olyan függvény, ami kapcsolatot teremt a bemenőfeszültség és áram, valamint a kimenőfeszültség és áram között:

$$f(U_{be}, U_{ki}, I_{be}, I_{ki}) = 0.$$



Lineáris négy-pólus

Olyan négy-pólus, amelynek átmeneti függvénye lineáris. Ilyen volt pl. a korábbiakban tárgyalt feszültségosztó, de nem ilyenek pl. a feszültségstabilizátorok. Egy lehetséges lineáris átmeneti függvény pl. a következő:

$$U_{ki} = a_{11}(U_{be} - U_{be,0}) + a_{12}(I_{be} - I_{be,0}) + U_{ki,0}$$

$$I_{ki} = a_{21}(U_{be} - U_{be,0}) + a_{22}(I_{be} - I_{be,0}) + I_{ki,0}$$

Passzív négypólus

Feszültség- és áramtermelő elemeket nem tartalmaz, azaz nulla bemenőfeszültség és bemenőáram mellett a kimenőfeszültsége és kimenőárama is nulla. Tekintsük példaként a fentebb adott lineáris átviteli függvényt:

$$U_{ki} = a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 - a_{11}U_{be,0} - a_{12}I_{be,0} + U_{ki,0} = 0 \Rightarrow U_{ki,0} - a_{11}U_{be,0} - a_{12}I_{be,0} = 0$$

$$I_{ki} = a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 0 - a_{21}U_{be,0} - a_{22}I_{be,0} + I_{ki,0} = 0 \Rightarrow I_{ki,0} - a_{21}U_{be,0} + a_{22}I_{be,0} = 0$$

aminek felhasználásával a passzív négypólus átviteli függvénye a következő alakot ölti:

$$U_{ki} = a_{11}U_{be} + a_{12}I_{be}$$

$$I_{ki} = a_{21}U_{be} + a_{22}I_{be}$$

vagyis a passzív négypólus átviteli függvénye konstans tagokat nem tartalmazhat. Hasonlóan beláthatjuk ezt az átviteli függvény minden más konkrét alakjánál is.

A passzív lineáris négypólus paraméterezései

A passzív lineáris négypólus állapotát leíró négy mennyiség (U_{be} , I_{be} , U_{ki} , I_{ki}) közül kettőt kiválasztva ezeket a másik kettő lineáris függvényeként adhatjuk meg. Ez összesen hatféle lehetőséget jelent:

$$\underbrace{U_{be}, I_{be}}_{\text{lánc}} \quad \underbrace{U_{ki}, I_{ki}}_{\text{inverz lánc}} \quad \underbrace{U_{be}, U_{ki}}_{\text{impedancia}} \quad \underbrace{I_{be}, I_{ki}}_{\text{admittancia}} \quad \underbrace{U_{be}, I_{ki}}_{\text{hibrid}} \quad \underbrace{I_{be}, U_{ki}}_{\text{inverz hibrid}}$$

1. Láncparaméterezés

$$\begin{aligned} U_{ki} &= a_{11}U_{be} + a_{12}I_{be} \\ I_{ki} &= a_{21}U_{be} + a_{22}I_{be} \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} U_{ki} \\ I_{ki} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{be} \\ I_{be} \end{pmatrix} = \underline{a} \begin{pmatrix} U_{be} \\ I_{be} \end{pmatrix}$$

$$\text{Láncparaméter-mátrix: } \underline{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

2. Inverz láncparaméterezés

$$\begin{aligned} U_{be} &= A_{11}U_{ki} + A_{12}I_{ki} \\ I_{be} &= A_{21}U_{ki} + A_{22}I_{ki} \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} U_{be} \\ I_{be} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{ki} \\ I_{ki} \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} U_{ki} \\ I_{ki} \end{pmatrix}$$

$$\text{Inverz láncparaméter-mátrix: } \underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

3. Impedancia paraméterezés

$$\begin{aligned} U_{be} &= z_{11}I_{be} + z_{12}I_{ki} \\ U_{ki} &= z_{21}I_{be} + z_{22}I_{ki} \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} U_{be} \\ U_{ki} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{be} \\ I_{ki} \end{pmatrix} = \underline{z} \begin{pmatrix} I_{be} \\ I_{ki} \end{pmatrix}$$

$$\text{Impedanciaparaméter-mátrix: } \underline{z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}.$$

4. Admittancia paraméterezés

$$\begin{aligned} I_{be} &= y_{11}U_{be} + y_{12}U_{ki} \\ I_{ki} &= y_{21}U_{be} + y_{22}U_{ki} \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} I_{be} \\ I_{ki} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{be} \\ U_{ki} \end{pmatrix} = \underline{y} \begin{pmatrix} U_{be} \\ U_{ki} \end{pmatrix}$$

$$\text{Admittanciaparaméter-mátrix: } \underline{y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}.$$

5. Hibrid paraméterezés

$$\begin{aligned} U_{be} &= h_{11}I_{be} + h_{12}U_{ki} \\ I_{ki} &= h_{21}I_{be} + h_{22}U_{ki} \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} U_{be} \\ I_{ki} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{be} \\ U_{ki} \end{pmatrix} = \underline{h} \begin{pmatrix} I_{be} \\ U_{ki} \end{pmatrix}$$

$$\text{Hibridparaméter-mátrix: } \underline{h} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

6. Inverz hibrid paraméterezés

$$\begin{aligned} I_{be} &= H_{11}U_{be} + H_{12}I_{ki} \\ U_{ki} &= H_{21}U_{be} + H_{22}I_{ki} \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} I_{be} \\ U_{ki} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{be} \\ I_{ki} \end{pmatrix} = \underline{H} \begin{pmatrix} U_{be} \\ I_{ki} \end{pmatrix}$$

$$\text{Inverz hibridparaméter-mátrix: } \underline{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}.$$

A paraméterezési módok egyenértékűek (bármelyik paramétercsoport bármelyik másikkal kifejezhető):

1. A láncparaméterek

a) az inverz láncparaméterekkel

láncparaméterekkel

inverz láncparaméterekkel

$$\begin{aligned} U_{ki} &= a_{11}U_{be} + a_{12}I_{be} & U_{be} &= A_{11}U_{ki} + A_{12}I_{ki} \Rightarrow \\ I_{ki} &= a_{21}U_{be} + a_{22}I_{be} & I_{be} &= A_{21}U_{ki} + A_{22}I_{ki} \end{aligned} \Rightarrow U_{ki} = \frac{\begin{vmatrix} U_{be} & A_{12} \\ I_{be} & A_{22} \end{vmatrix}}{\|A\|} = \frac{A_{22}}{\|A\|} U_{be} - \frac{A_{12}}{\|A\|} I_{be}, \quad I_{ki} = \frac{\begin{vmatrix} A_{11} & U_{be} \\ A_{21} & I_{be} \end{vmatrix}}{\|A\|} = -\frac{A_{21}}{\|A\|} U_{be} + \frac{A_{11}}{\|A\|} I_{be},$$

$$a = \begin{pmatrix} \frac{A_{22}}{\|A\|} & -\frac{A_{12}}{\|A\|} \\ -\frac{A_{21}}{\|A\|} & \frac{A_{11}}{\|A\|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} & -\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \\ -\frac{A_{21}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} & \frac{A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \end{pmatrix}.$$

b) az impedancia paraméterekkel

láncparaméterekkel

impedancia paraméterekkel

$$\begin{aligned} U_{ki} &= a_{11}U_{be} + a_{12}I_{be} & U_{be} &= z_{11}I_{be} + z_{12}I_{ki} \Rightarrow \\ I_{ki} &= a_{21}U_{be} + a_{22}I_{be} & U_{ki} &= z_{21}I_{be} + z_{22}I_{ki} \end{aligned} \Rightarrow I_{ki} = \frac{1}{z_{12}} U_{be} - \frac{z_{11}}{z_{12}} I_{be}, \quad U_{ki} = z_{21}I_{be} + z_{22}I_{ki} = z_{21}I_{be} + z_{22} \left(\frac{1}{z_{12}} U_{be} - \frac{z_{11}}{z_{12}} I_{be} \right) = \frac{z_{22}}{z_{12}} U_{be} + \left(z_{21} - \frac{z_{11}z_{22}}{z_{12}} \right) I_{be},$$

$$a = \begin{pmatrix} \frac{z_{22}}{z_{12}} & z_{21} - \frac{z_{11}z_{22}}{z_{12}} \\ \frac{1}{z_{12}} & -\frac{z_{11}}{z_{12}} \end{pmatrix}.$$

c) az admittancia paraméterekkel

láncparaméterekkel

admittancia paraméterekkel

$$\begin{aligned} U_{ki} &= a_{11}U_{be} + a_{12}I_{be} & I_{be} &= y_{11}U_{be} + y_{12}U_{ki} \Rightarrow \\ I_{ki} &= a_{21}U_{be} + a_{22}I_{be} & I_{ki} &= y_{21}U_{be} + y_{22}U_{ki} \end{aligned} \Rightarrow U_{ki} = -\frac{y_{11}}{y_{12}} U_{be} + \frac{1}{y_{12}} I_{be}, \quad I_{ki} = y_{21}U_{be} + y_{22} \left(-\frac{y_{11}}{y_{12}} U_{be} + \frac{1}{y_{12}} I_{be} \right) = \left(y_{21} - \frac{y_{11}y_{22}}{y_{12}} \right) U_{be} + \frac{y_{22}}{y_{12}} I_{be},$$

$$a = \begin{pmatrix} -\frac{y_{11}}{y_{12}} & \frac{1}{y_{12}} \\ y_{21} - \frac{y_{11}y_{22}}{y_{12}} & \frac{y_{22}}{y_{12}} \end{pmatrix}.$$

d) a hibrid paraméterekkel

láncparaméterekkel

hibrid paraméterekkel

$$\begin{aligned} U_{ki} &= a_{11}U_{be} + a_{12}I_{be} & U_{be} &= h_{11}I_{be} + h_{12}U_{ki} \Rightarrow \\ I_{ki} &= a_{21}U_{be} + a_{22}I_{be} & I_{ki} &= h_{21}I_{be} + h_{22}U_{ki} \end{aligned} \Rightarrow U_{ki} = \frac{1}{h_{12}} U_{be} - \frac{h_{11}}{h_{12}} I_{be}, \quad I_{ki} = h_{21}I_{be} + h_{22} \left(\frac{1}{h_{12}} U_{be} - \frac{h_{11}}{h_{12}} I_{be} \right) = \frac{h_{22}}{h_{12}} U_{be} + \left(h_{21} - \frac{h_{11}h_{22}}{h_{12}} \right) I_{be},$$

$$a = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_{12}} & -\frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & h_{21} - \frac{h_{11}h_{22}}{h_{12}} \end{pmatrix}.$$

e) az inverz hibrid paraméterekkel

láncparaméterekkel

inverz hibrid paraméterekkel

$$\begin{aligned} U_{ki} &= a_{11}U_{be} + a_{12}I_{be} & I_{be} &= H_{21}U_{be} + H_{22}I_{ki} \Rightarrow \\ I_{ki} &= a_{21}U_{be} + a_{22}I_{be} & U_{ki} &= H_{11}U_{be} + H_{12}I_{ki} \end{aligned} \Rightarrow I_{ki} = -\frac{H_{21}}{H_{22}} U_{be} + \frac{1}{H_{22}} I_{be}, \quad U_{ki} = H_{11}U_{be} + H_{12} \left(-\frac{H_{21}}{H_{22}} U_{be} + \frac{1}{H_{22}} I_{be} \right) = \left(H_{11} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{22}} \right) U_{be} + \frac{H_{12}}{H_{22}} I_{be},$$

$$a = \begin{pmatrix} H_{11} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{22}} & \frac{H_{12}}{H_{22}} \\ -\frac{H_{21}}{H_{22}} & \frac{1}{H_{22}} \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan határozhatók meg a további paraméterek is bármelyik másikkal kifejezve (amit itt már nem végzünk el, csak jelezzük, hogy mely paramétereket melyekkel lehet kifejezni):

2. Az inverz láncparaméterek

- a) a láncparaméterekkel
- b) az impedancia paraméterekkel
- c) az admittancia paraméterekkel
- d) a hibrid paraméterekkel
- e) az inverz hibrid paraméterekkel

3. Az impedancia paraméterek

- a) a láncparaméterekkel
- b) ...

Szimmetrikus négypólus: olyan négypólus, amelynek viselkedése a négypólus megfordításakor nem változik (mindegy, mely pólusait használjuk bemenetnek, ill. kimenetnek).

A szimmetria jelentkezése az átviteli függvényben abban nyilvánul meg, hogy az átviteli függvény a be- és a kimeneti mennyiségek felcserélésével szemben invariáns – de természetesen csak akkor, ha magukat a be- és kimeneti mennyiségeket is szimmetrikusan értelmezzük (tehát például a bemeneti és kimeneti áramot egyaránt befelé folyónak).

A szimmetria feltétele a paraméter-mátrixokban

1. a láncparaméterekben

láncparaméterek

a be- és kimeneteket felcserélve

$$\begin{aligned} U_{ki} &= a_{11}U_{be} + a_{12}I_{be} & U_{be} &= a_{11}U_{ki} + a_{12}I_{ki} \\ I_{ki} &= a_{21}U_{be} + a_{22}I_{be} & I_{be} &= a_{21}U_{ki} + a_{22}I_{ki} \end{aligned} \Rightarrow U_{ki} = \frac{\begin{vmatrix} U_{be} & a_{12} \\ I_{be} & a_{22} \end{vmatrix}}{\|a\|} = \frac{a_{22}}{\|a\|} U_{be} - \frac{a_{12}}{\|a\|} I_{be}, \quad I_{ki} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & U_{be} \\ a_{21} & I_{be} \end{vmatrix}}{\|a\|} = -\frac{a_{21}}{\|a\|} U_{be} + \frac{a_{11}}{\|a\|} I_{be},$$

$$a_{11} = \frac{a_{22}}{\|a\|}; \quad a_{12} = -\frac{a_{12}}{\|a\|}; \quad a_{21} = -\frac{a_{21}}{\|a\|}; \quad a_{22} = \frac{a_{11}}{\|a\|}.$$

Innen $\|a\| = -1$, és $a_{11} = -a_{22}$. Ezek felhasználásával a láncparaméter-mátrix determinánása:

$$\|a\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{vmatrix} = -a_{11}^2 - a_{12}a_{21} = -1 \Rightarrow a_{11} = \sqrt{1 - a_{12}a_{21}} \Rightarrow a = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - a_{12}a_{21}} & a_{12} \\ a_{21} & -\sqrt{1 - a_{12}a_{21}} \end{pmatrix}.$$

2. az inverz láncparaméterekben

inverz láncparaméterek

a be- és kimeneteket felcserélve

$$\begin{aligned} U_{be} &= A_{11}U_{ki} + A_{12}I_{ki} & U_{ki} &= A_{11}U_{be} + A_{12}I_{be} \\ I_{be} &= A_{21}U_{ki} + A_{22}I_{ki} & I_{ki} &= A_{21}U_{be} + A_{22}I_{be} \end{aligned} \Rightarrow U_{be} = \frac{\begin{vmatrix} U_{ki} & A_{12} \\ I_{ki} & A_{22} \end{vmatrix}}{\|A\|} = \frac{A_{22}}{\|A\|} U_{ki} - \frac{A_{12}}{\|A\|} I_{ki}, \quad I_{be} = \frac{\begin{vmatrix} A_{11} & U_{ki} \\ A_{21} & I_{ki} \end{vmatrix}}{\|A\|} = -\frac{A_{21}}{\|A\|} U_{ki} + \frac{A_{11}}{\|A\|} I_{ki},$$

$$A_{11} = \frac{A_{22}}{\|A\|}; \quad A_{12} = -\frac{A_{12}}{\|A\|}; \quad A_{21} = -\frac{A_{21}}{\|A\|}; \quad A_{22} = \frac{A_{11}}{\|A\|}, \text{nen } \|A\| = -1, \text{ és } A_{11} = -A_{22}. \text{ Ezek felhasználásával az inverz láncparaméter-mátrix determinánása:}$$

$$\|A\| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11} \end{vmatrix} = -A_{11}^2 - A_{12}A_{21} = -1 \Rightarrow A_{11} = \sqrt{1 - A_{12}A_{21}} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - A_{12}A_{21}} & A_{12} \\ A_{21} & -\sqrt{1 - A_{12}A_{21}} \end{pmatrix}.$$

3. az impedanciaparaméterekben

impedancia paraméterek

a be- és a kimeneteket felcserélve

$$\begin{aligned} U_{be} &= z_{11}I_{be} + z_{12}I_{ki} & U_{ki} &= z_{11}I_{ki} + z_{12}I_{be} \\ U_{ki} &= z_{21}I_{be} + z_{22}I_{ki} & U_{be} &= z_{21}I_{ki} + z_{22}I_{be} \end{aligned},$$

$$z_{11} = z_{22}; \quad z_{12} = z_{21}; \quad z_{12} = z_{21}; \quad z_{11} = z_{22}.$$

Ezek felhasználásával az impedanciaparaméter-mátrix determinánása:

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{11} \end{pmatrix}.$$

4. az admittanciaparaméterekben

admittanciaparaméterek a be- és kimeneteket felcserélve

$$\begin{aligned} I_{be} &= y_{11}U_{be} + y_{12}U_{ki} & I_{ki} &= y_{11}U_{ki} + y_{12}U_{be} \\ I_{ki} &= y_{21}U_{be} + y_{22}U_{ki} & I_{be} &= y_{21}U_{ki} + y_{22}U_{be} \end{aligned}$$

$$y_{11} = y_{22}; \quad y_{12} = y_{21}; \quad y_{12} = y_{21}; \quad y_{11} = y_{22}.$$

Ezek felhasználásával az admittanciaparaméter-mátrix determinánása:

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{12} & y_{11} \end{pmatrix}.$$

5. a hibrid paraméterekben

hibrid paraméterek a be- és kimeneteket felcserélve

$$\begin{aligned} U_{be} &= h_{11}I_{be} + h_{12}U_{ki} & U_{ki} &= h_{11}I_{ki} + h_{12}U_{be} \\ I_{ki} &= h_{21}I_{be} + h_{22}U_{ki} & I_{be} &= h_{21}I_{ki} + h_{22}U_{be} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} U_{be} &= \frac{\begin{vmatrix} h_{11} & U_{ki} \\ h_{21} & I_{be} \end{vmatrix}}{\|h\|} = \frac{h_{11}}{\|h\|} I_{be} - \frac{h_{21}}{\|h\|} U_{ki}, & I_{ki} &= \frac{\begin{vmatrix} U_{ki} & h_{12} \\ I_{be} & h_{22} \end{vmatrix}}{\|h\|} = -\frac{h_{12}}{\|h\|} I_{be} + \frac{h_{22}}{\|h\|} U_{ki}, \\ h_{11} &= \frac{h_{11}}{\|h\|}, & h_{12} &= -\frac{h_{21}}{\|h\|}, & h_{21} &= -\frac{h_{12}}{\|h\|}, & h_{22} &= \frac{h_{22}}{\|h\|}. \end{aligned}$$

Innen $\|h\| = 1$, és $h_{21} = -h_{12}$. Ezek felhasználásával a hibridparaméter-mátrix determinánása:

$$\|h\| = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ -h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} = h_{11}h_{22} + h_{12}^2 = 1 \Rightarrow h_{12} = \sqrt{1 - h_{11}h_{22}} \Rightarrow \underline{h} = \begin{pmatrix} h_{11} & \sqrt{1 - h_{11}h_{22}} \\ -\sqrt{1 - h_{11}h_{22}} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

6. az inverz hibrid paraméterekben

inverz hibrid paraméterek a be- és kimeneteket felcserélve

$$\begin{aligned} I_{be} &= H_{11}U_{be} + H_{12}I_{ki} & I_{ki} &= H_{11}U_{ki} + H_{12}I_{be} \\ U_{ki} &= H_{21}U_{be} + H_{22}I_{ki} & U_{be} &= H_{21}U_{ki} + H_{22}I_{be} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} I_{be} &= \frac{\begin{vmatrix} H_{11} & I_{ki} \\ H_{21} & U_{be} \end{vmatrix}}{\|H\|} = \frac{H_{11}}{\|H\|} U_{be} - \frac{H_{21}}{\|H\|} I_{ki}, & U_{ki} &= \frac{\begin{vmatrix} I_{ki} & H_{12} \\ U_{be} & H_{22} \end{vmatrix}}{\|H\|} = -\frac{H_{12}}{\|H\|} U_{be} + \frac{H_{22}}{\|H\|} I_{ki}, \\ H_{11} &= \frac{H_{11}}{\|H\|}, & H_{12} &= -\frac{H_{21}}{\|H\|}, & H_{21} &= -\frac{H_{12}}{\|H\|}, & H_{22} &= \frac{H_{22}}{\|H\|}. \end{aligned}$$

Innen $\|H\| = 1$, $H_{12} = -H_{21}$, $H_{21} = -H_{12}$, és $\|H\| = 1$. Ezek felhasználásával az inverz hibridparaméter-mátrix determinánása:

$$\|H\| = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ -H_{12} & H_{22} \end{vmatrix} = H_{11}H_{22} + H_{12}^2 = 1 \Rightarrow H_{12} = \sqrt{1 - H_{11}H_{22}} \Rightarrow \underline{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & \sqrt{1 - H_{11}H_{22}} \\ -\sqrt{1 - H_{11}H_{22}} & H_{22} \end{pmatrix}.$$

Látjuk, hogy a szimmetria a független paraméterek számát 4-ről 2-re csökkenti.

A négygólusok további jellemzői

Bemeneti impedancia: $z_{be} = \frac{U_{be}}{I_{be}}$, vagy általánosabban (nem lineáris négygólusra is alkalmas formában): $z_{be} = \frac{\partial U_{be}}{\partial I_{be}}$.

Az inverz láncparaméterekkel kifejezve:

$$z_{be} = \frac{U_{be}}{I_{be}} = \frac{A_{11}U_{ki} + A_{12}I_{ki}}{A_{21}U_{ki} + A_{22}I_{ki}} = \frac{A_{11} \frac{U_{ki}}{I_{ki}} + A_{12}}{A_{21} \frac{U_{ki}}{I_{ki}} + A_{22}} = \frac{-A_{11}z_{ki} + A_{12}}{-A_{21}z_{ki} + A_{22}}.$$

a) **üresjárási bemeneti impedancia:** $z_{be, \emptyset} = \frac{U_{be}}{I_{be}} \Big|_{I_{ki}=0}$.

Az inverz láncparaméterekkel kifejezve:

$$z_{be, \emptyset} = \frac{U_{be}}{I_{be}} \Big|_{I_{ki}=0} = \frac{A_{11}U_{ki} + A_{12}I_{ki}}{A_{21}U_{ki} + A_{22}I_{ki}} = \frac{A_{11}}{A_{21}}.$$

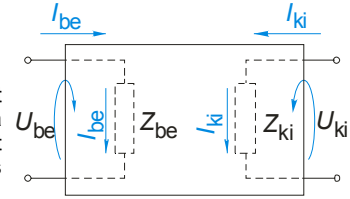
b) **rövidzárlati bemeneti impedancia:** $z_{be, r} = \frac{U_{be}}{I_{be}} \Big|_{U_{ki}=0}$.

Az inverz láncparaméterekkel kifejezve:

$$z_{be,r} = \left. \frac{U_{be}}{I_{be}} \right|_{U_{ki}=0} = \frac{A_{11}U_{ki} + A_{12}I_{ki}}{A_{21}U_{ki} + A_{22}I_{ki}} = \frac{A_{12}}{A_{22}}$$

Kimeneti impedancia: $z_{ki} = -\frac{U_{ki}}{I_{ki}}$, vagy általánosabban (nem lineáris négypólusra is alkalmas módon): $z_{ki} = -\frac{\partial U_{ki}}{\partial I_{ki}}$.

Első pillanatra meglepőnek tűnhet a kimeneti impedancia definíciójában szereplő mínuszjel. A kimeneti impedanciát azért kell ilyen módon definiálnunk, mert a négypólus jellemző mennyiségeit az ábra szerint *szimmetrikusan* vesszük fel, így a kimenő áramot akkor előjelezzük pozitívrá, amikor befelé folyik. A be- és kimenő áramok szimmetrikus felvétele pedig azért célszerű, mert így a négypólus megfordítását (pl. a négypólus szimmetrikus voltának vizsgálatakor) egyszerűen a be- és kimeneti mennyiségek felcserélésével vehetjük figyelembe.



A láncparaméterekkel kifejezve:

$$z_{ki} = -\frac{U_{ki}}{I_{ki}} = -\frac{a_{11}U_{be} + a_{12}I_{be}}{a_{21}U_{be} + a_{22}I_{be}} = -\frac{a_{11}\frac{U_{be}}{I_{be}} + a_{12}}{a_{21}\frac{U_{be}}{I_{be}} + a_{22}} = -\frac{a_{11}z_{be} + a_{12}}{a_{21}z_{be} + a_{22}}$$

a) **üresjárás kimeneti impedancia:** $z_{ki,u} = -\left. \frac{U_{ki}}{I_{ki}} \right|_{I_{be}=0}$

A láncparaméterekkel kifejezve:

$$z_{ki,u} = -\left. \frac{U_{ki}}{I_{ki}} \right|_{I_{be}=0} = -\frac{a_{11}U_{be} + a_{12}I_{be}}{a_{21}U_{be} + a_{22}I_{be}} = -\frac{a_{11}}{a_{21}}$$

b) **rövidzárt kimeneti impedancia:** $z_{ki,r} = -\left. \frac{U_{ki}}{I_{ki}} \right|_{U_{be}=0}$

A láncparaméterekkel kifejezve:

$$z_{ki,r} = -\left. \frac{U_{ki}}{I_{ki}} \right|_{U_{be}=0} = -\frac{a_{11}U_{be} + a_{12}I_{be}}{a_{21}U_{be} + a_{22}I_{be}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$$

Ha $z_{ki} = z_{be}$, $\Rightarrow a$ $z_{ki} = z_{be} = z_0$ impedanciát a négypólus **karakterisztikus impedanciájának** nevezzük.

$$z_{ki} = z_0 = -\frac{a_{11}z_0 + a_{12}}{a_{21}z_0 + a_{22}} \Rightarrow a_{21}z_0^2 + (a_{11} + a_{22})z_0 + a_{12} = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{-(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{12}a_{21}}}{2a_{21}}$$

Ha a négypólus szimmetrikus, $\underline{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-a_{12}a_{21}} & a_{12} \\ a_{21} & -\sqrt{1-a_{12}a_{21}} \end{pmatrix}$, így $a_{11} + a_{22} = 0$, amivel $z_0 = \frac{\sqrt{-4a_{12}a_{21}}}{2a_{21}} = \sqrt{-\frac{a_{12}}{a_{21}}}$.

Fejezzük ki a karakterisztikus impedanciát a kimeneti üresjárati és a kimeneti rövidzárt kimeneti impedanciákkal:

$$z_0 = \sqrt{-\frac{a_{12}}{a_{21}}} = \sqrt{\underbrace{\left(-\frac{a_{12}}{a_{21}}\right)}_1 \underbrace{\left(\frac{a_{11}}{a_{22}}\right)}_{z_{ki,u}}} = \sqrt{\underbrace{\left(-\frac{a_{11}}{a_{21}}\right)}_{z_{ki,u}} \underbrace{\left(-\frac{a_{12}}{a_{22}}\right)}_{z_{ki,r}}} = \sqrt{z_{ki,u} z_{ki,r}}$$

A karakterisztikus impedancia két méréssel meghatározható: $z_{ki,u}$ és $z_{ki,r}$ méréssel. Mivel a szimmetrikus négypólus be- és kimenete felcserélhető, a karakterisztikus impedancia meghatározható az üresjárati és rövidzárt **bemeneti** impedancia alapján is: $z_0 = \sqrt{z_{be,u} z_{be,r}}$. Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha a karakterisztikus impedancia kapcsolatát a nevezetes bemeneti impedanciákkal az előbbi eredmény ismerete nélkül határozzuk meg:

$$z_{be} = z_0 = \frac{-A_{11}z_0 + A_{12}}{-A_{21}z_0 + A_{22}} \Rightarrow -A_{21}z_0^2 + (A_{11} + A_{22})z_0 - A_{12} = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{-(A_{11} + A_{22}) \pm \sqrt{(A_{11} + A_{22})^2 - 4A_{12}A_{21}}}{-2A_{21}}$$

Ha a négypólus szimmetrikus, $\underline{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-A_{12}A_{21}} & A_{12} \\ A_{21} & -\sqrt{1-A_{12}A_{21}} \end{pmatrix}$, így $A_{11} + A_{22} = 0$, amivel a karakterisztikus impedancia: $z_0 = \frac{\sqrt{-4A_{12}A_{21}}}{-2A_{21}} = \sqrt{-\frac{A_{12}}{A_{21}}}$,

$$z_0 = \sqrt{-\frac{A_{12}}{A_{21}}} = \sqrt{\underbrace{\left(-\frac{A_{12}}{A_{21}}\right)}_1 \underbrace{\left(\frac{A_{11}}{A_{22}}\right)}_{z_{be,u}}} = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{A_{11}}{A_{21}}\right)}_{z_{be,u}} \underbrace{\left(\frac{A_{12}}{A_{22}}\right)}_{z_{be,r}}} = \sqrt{z_{be,u} z_{be,r}}$$

Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti négyfólyus láncparaméter-mátrixát!

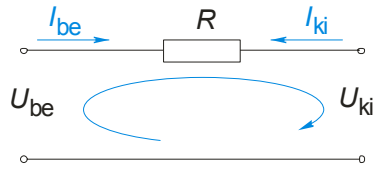
Megoldás

A be- és kimeneti kapcsokat magába foglaló hurokra a Kirchoff-törvény: $U_{be} + I_{be}R - U_{ki} = 0 \Rightarrow U_{ki} = \frac{1}{a_{11}}U_{be} + \frac{R}{a_{12}}I_{be}$.

Másrészt $I_{ki} = -I_{be} \Rightarrow I_{ki} = \frac{0}{a_{21}}U_{be} + \frac{-1}{a_{22}}I_{be}$. Ezzel a láncparaméter-mátrix: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, aminek determinánsa:

$\|\underline{a}\| = \begin{vmatrix} 1 & R \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$, és $a_{11} = -a_{22}$, tehát a négyfólyus szimmetrikus (ami persze a kapcsolási rajzon is azonnal látszik). A karakterisztikus impedancia:

$$z_0 = \sqrt{\frac{-a_{12}}{a_{21}}} = \sqrt{\frac{R}{0}} \rightarrow \infty.$$



Feladat

Határozzuk meg az ábra szerinti R_1, R_2, R ellenállásokból álló, ún. T-tag láncparaméter-mátrixát!

Megoldás

A huroktörvény a bemeneti körre:

$$U_{be} + I_{be}R_1 + (I_{be} + I_{ki})R = 0 \Rightarrow I_{ki} = -\frac{1}{R}U_{be} - \left(1 + \frac{R_1}{R}\right)I_{be}.$$

A huroktörvény a kimeneti körre:

$$-U_{ki} - (I_{be} + I_{ki})R - I_{ki}R_2 = 0 \Rightarrow U_{ki} = -I_{be}R - I_{ki}(R_2 + R).$$

Ebbe I_{ki} imént kapott értékét behelyettesítve:

$$U_{ki} = -I_{be}R + \left(\frac{U_{be}}{R} + I_{be}\left(1 + \frac{R_1}{R}\right)\right)(R_2 + R) = \frac{R_2 + R}{R}U_{be} + \left(\frac{(R + R_1)(R_2 + R)}{R} - R\right)I_{be} = \left(\frac{R_2}{R} + 1\right)U_{be} + \left(\cancel{R} + R_2 + R_1 + \frac{R_1R_2}{R} - \cancel{R}\right)I_{be} = \left(1 + \frac{R_2}{R}\right)U_{be} + \left(R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R}\right)I_{be}.$$

Ezzel a láncparaméter-mátrix:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{R_2}{R} & R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R} \\ -\frac{1}{R} & -\left(1 + \frac{R_1}{R}\right) \end{pmatrix},$$

aminek determinánsa:

$$\|\underline{a}\| = \begin{vmatrix} 1 + \frac{R_2}{R} & R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R} \\ -\frac{1}{R} & -\left(1 + \frac{R_1}{R}\right) \end{vmatrix} = -\left(1 + \frac{R_2}{R}\right)\left(1 + \frac{R_1}{R}\right) + \frac{1}{R}\left(R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R}\right) = -1 - \frac{R_1 + R_2}{R} - \frac{R_1R_2}{R^2} + \frac{R_1 + R_2}{R} + \frac{R_1R_2}{R^2} = -1,$$

tehát ha az $a_{22} = -a_{11}$ feltétel is teljesül, vagyis ha $R_1 = R_2$, a négyfólyus szimmetrikus (ami persze a kapcsolási rajzon is azonnal látszik). Ha a szimmetria feltétele teljesül, vagyis $R_1 = R_2 = R_0$, a négyfólyus karakterisztikus impedanciája:

$$z_0 = \sqrt{\frac{-a_{12}}{a_{21}}} = \sqrt{\left(2R_0 + \frac{R_0^2}{R}\right)R} = \sqrt{(2R_0 + R)R_0}.$$

Feladat

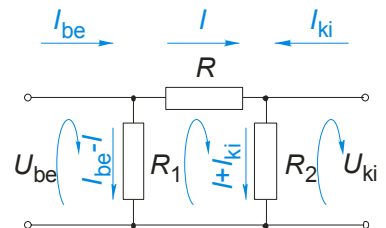
Határozzuk meg az ábra szerinti R_1, R_2, R ellenállásokból álló, ún. π -tag láncparaméter-mátrixát!

Megoldás

A huroktörvény a bemeneti körre: $U_{be} + (I_{be} - I)R_1 = 0$; a kimeneti körre: $U_{ki} + (I_{ki} + I)R_2 = 0$; a belső hurokra pedig: $-(I_{be} - I)R_1 + IR + (I_{ki} + I)R_2 = 0$. Ebből I -t kifejezzük:

$$I = I_{be} \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R} - I_{ki} \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R},$$

majd az első egyenletbe beírjuk:



$$U_{be} + I_{be}R_1 - IR_1 = 0 \Rightarrow U_{be} + I_{be} \left(R_1 - \frac{R_1^2}{R_1 + R_2 + R} \right) + I_{ki} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R} = 0 \Rightarrow U_{be} + I_{be} \frac{R_1(R_2 + R)}{R_1 + R_2 + R} + I_{ki} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R} = 0 \Rightarrow I_{ki} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R} = -U_{be} - \frac{R_1(R_2 + R)}{R_1 + R_2 + R} I_{be}.$$

Innen I_{ki} -t kifejezve:

$$I_{ki} = - \underbrace{\frac{R_1 + R_2 + R}{R_1 R_2}}_{a_{21}} U_{be} - \underbrace{\left(1 + \frac{R}{R_2} \right)}_{a_{22}} I_{be}.$$

I kifejezését most a kimeneti hurok egyenletébe beírva:

$$U_{ki} + \left(I_{ki} + I_{be} \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R} - I_{ki} \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R} \right) R_2 = 0 \Rightarrow U_{ki} + I_{ki} \frac{R_2(R_1 + R)}{R_1 + R_2 + R} + I_{be} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R} = 0.$$

Most I_{ki} értékét behelyettesítve:

$$U_{ki} - \left(\frac{R_1 + R_2 + R}{R_1 R_2} U_{be} + \left(1 + \frac{R}{R_2} \right) I_{be} \right) \frac{R_2(R_1 + R)}{R_1 + R_2 + R} + I_{be} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R} = 0 \Rightarrow U_{ki} - \frac{R_1 + R}{R_1} U_{be} - \left(1 + \frac{R}{R_2} \right) \frac{R_2(R_1 + R)}{R_1 + R_2 + R} I_{be} + I_{be} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R} = 0 \Rightarrow U_{ki} - \frac{R_1 + R}{R_1} U_{be} - \frac{(R_2 + R)(R_1 + R) - R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R} I_{be} = 0.$$

Innen U_{ki} -t kifejezve:

$$U_{ki} = \underbrace{\frac{R_1 + R}{R_1}}_{a_{11}} U_{be} + \underbrace{\frac{(R_2 + R)(R_1 + R) - R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R}}_{a_{12}} I_{be}.$$

A láncparaméter-mátrix:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{R}{R_1} & \frac{(R_2 + R)(R_1 + R) - R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R} \\ -\frac{R_1 + R_2 + R}{R_1 R_2} & -\left(1 + \frac{R}{R_2} \right) \end{pmatrix}.$$

Ennek determinánása:

$$\|\underline{a}\| = \begin{vmatrix} 1 + \frac{R}{R_1} & \frac{(R_2 + R)(R_1 + R) - R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R} \\ -\frac{R_1 + R_2 + R}{R_1 R_2} & -\left(1 + \frac{R}{R_2} \right) \end{vmatrix} = -\frac{(R_1 + R)(R_2 + R)}{R_1 R_2} + \frac{(R_2 + R)(R_1 + R) - R_1 R_2}{R_1 R_2} = -1,$$

tehát ha az $a_{22} = -a_{11}$ feltétel is teljesül, vagyis ha $R_1 = R_2$, a négypólus szimmetrikus (ami persze a kapcsolási rajzon is azonnal látszik). Ha a szimmetria feltétele teljesül, vagyis $R_1 = R_2 = R_0$, a négypólus karakterisztikus impedanciája:

$$z_0 = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}} = \sqrt{\frac{(R_0 + R)^2 - R_0^2}{2R_0 + R} \frac{R_0^2}{2R_0 + R}} = R_0 \sqrt{\frac{(R_0 + R)^2 - R_0^2}{(2R_0 + R)^2}} = R_0 \sqrt{\frac{R^2 + 2RR_0}{(2R_0 + R)^2}}.$$