



**BUDAPESTI MŰSZAKI és GAZDASÁGTUDOMÁNYI
EGYETEM**
Közlekedésmérnöki Kar

J Á R M Ű R E N D S Z E R - D I A G N O S Z T I K A

2. A járműrendszer-diagnosztika mérési gyakorlata és a rendszerdinamika felhasználási lehetőségei

Oktatási segédlet

(I. rész, 2.1 – 2.4 fejezet)

Készítette::

Dr. Zobory István
egyetemi tanár

Dr. Benedek Teofil
egyetemi docens

Dr. Győri József
egyetemi docens

B U D A P E S T
2 0 0 7

Az eddig készült oktatási segédletek:

1. A járműrendszer-diagnosztika elméleti alapjai
- 2./a A járműrendszer-diagnosztika mérési gyakorlata és a rendszerdinamika felhasználási lehetőségei (I. rész)
- 2./b A járműrendszer-diagnosztika mérési gyakorlata és a rendszerdinamika felhasználási lehetőségei (II. rész)
3. A metrológia a járműrendszer-diagnosztikában. Méréstechnika
4. A metrológia a járműrendszer-diagnosztikában. Méréselmélet
5. A futóműdiagnosztikai mérések fejlesztési lehetőségei, a Vasúti Járművek Tanszéken fejlesztés alatt álló futóműdiagnosztikai próbapad
6. A járműüzem szimulációjának néhány alkalmazási lehetősége a futóműdiagnosztikában (készítés alatt)
7. A DB (Német Vasutak) ICE motorvonatainak üzemében alkalmazott karbantartási-javítási rendszer

2. A járműrendszer-diagnosztika mérési gyakorlata és a rendszerdinamika felhasználási lehetőségei

(I. rész)

Tartalom:

- 2.1 Bevezetés
- 2.2 A vasúti járműdiagnosztikában alkalmazott mérések. A futóműdiagnosztika fontossága
- 2.3 Vasúti járművek futóműdiagnosztikai mérései
 - 2.3.1 A kerékpárok keréktávolságának ellenőrzése
 - 2.3.2 A futókörátmérő mérése
 - 2.3.3 Az abroncsvastagság ellenőrzése
 - 2.3.4 A kerékprofil jellemzőinek ellenőrző mérései
- 2.4 A rendszerdinamika a járműdiagnosztikában. Elméleti alapok
 - 2.4.1 A mozgásegyenletek szerkezete
 - 2.4.2 A mozgásegyenletek mátrix-vektoros alakban
 - 2.4.3 Sajátértékek, sajátvektorok, sajátfrekvenciák
 - 2.4.4 A paramétervektor, a kritériumvektor, a jármű üzemkészsége

Felhasznált irodalom:

1. Dr. Zobori I.: A pálya-jármű rendszer diagnosztikája a járműgépész szemével. V. Nemzetközi „Pálya-Jármű Rendszer”. KTE Konferencia, Velem, 1993.
2. Dr. Benedek T.: Futóműdiagnosztika kialakítása dinamikai szimulációval létrehozott adatbank felhasználásával. VIII. Országos Vasúti Futástechnikai Konferencia. Pécs, 1997. május.
3. Görbicz S. – Sasi I. – Vadász P.: Vasúti járművek minősítő mérései. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983.
4. Thamm - Ludwig - Huszár - Szántó: A szilárdságtan kísérleti módszerei. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.
5. Hottinger Baldwin Messtechnik. Product Catalogue 1999. Magyarországi képviselő: 2101. Gödöllő, Remsey krt. 9. Pf: 81.
6. Dr. Sostarics Gy., Dr. Balogh V.: Vasúti járművek. Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
7. Tfirst Gy.: A vasúti járművek futásminősítésének időszerű kérdései. Járművek, Mezőgazdasági Gépek. 30. évfolyam 1983. 10. szám.
8. Dr. Ambrózy András – Jávör András: Mérésadatok kiértékelése. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.
9. Gabor C. Temes – Sanjit K. Mitra: Modern Filter Design and Theory. John Wiley, New York, 1973.
10. Dr. Horváth Károly: Mérnöki Fizika. Egyetemi jegyzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
11. Korn, G.A., Korn, T.M.: Matematikai Kézikönyv Műszakiaknak. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.

2. A járműrendszer-diagnosztika mérési gyakorlata és a rendszerdinamika felhasználási lehetőségei

2.1 Bevezetés

Mindenekelőtt a „**Járműrendszer-diagnosztika**” fogalmát kell megvilágítani. A „**Járműrendszer**” szó azt jelenti, hogy a járművet a pályával és az egész üzemi környezetével egyetlen rendszerbe foglalva kell vizsgálni, mivel a jármű, a pálya és az egész üzemi környezete között állandó kölcsönhatás áll fenn. Ez a kölcsönhatás vasúti jármű és pálya esetében jól megfigyelhető, közúti jármű és pálya esetében már jóval kevésbé.

A „**diagnosztika**” szó azt jelenti, hogy a jármű aktuális műszaki állapotát kell felmérni abból a célból, hogy az üzemzavarok bekövetkezését előre lehessen jelezni, vagy hogy az üzemzavart még a kezdeti, viszonylag kevés károsodást okozó állapotában lehessen felfedezni és a szükséges javításokat végrehajtani. Ezért a műszaki állapot felmérését lehetőleg sűrű időközökben volna célszerű elvégezni. Ha erre nincs mód valamilyen oknál fogva, és a járművek javításával megvárjuk az üzemzavarok bekövetkeztét, akkor a jármű előbb-utóbb olyan állapotba kerül, hogy gyakorlatilag mindig javítani kell rajta valamit. Emellett sok üzemzavar – pl. egy alkatrész törése – még jelentős egyéb károsodást, sérülést, stb. okozhat a sérült gépalkatrész környezetében.

A műszaki állapotot úgy tudjuk felmérni, hogy **méréseket és más ellenőrzéseket végzünk** az alábbi területeken:

- kopásnak kitett alkatrészek méretének ellenőrzése (a járműkerék abroncsának futófelülete, lengéscsillapítók szelepei, stb.);
- a jármű üzemével kapcsolatos adatok ellenőrzése (a jármű gépezetének össz- és részhatásfokai, fajlagos energiafogyasztása, vonóerő-sebeség jelleggörbéje, stb.);
- rugók és csillapítók jelleggörbéjének ellenőrzése (pl. gumirugók anyagának keményedése miatt, lengéscsillapítók szelepeinek kopása következtében, stb.);
- bizonyos alkatrészek törésének, vagy egyéb üzemzavarának felderítése (pl. laprugók főlap-törése, duplex csavarugók belső rugójának törése, stb.);
- stb.

A felsorolt mérések és ellenőrzések végrehajtásához a legtöbb esetben több-kevesebb szét-szerelési munka szükséges. Hordrugók és lengéscsillapítók jelleggörbéjének méréséhez, illetve ellenőrzéséhez a jármű egész futóművét szét kell bontani, miután a járművet daruval fel-emelték. A vasúti járműkerék-profilok ellenőrzése során még a kerék aktuális gördülőkör-átmérőjének látszólag egyszerű megmérése is sok esetben igen nehézkes a zsúfolt felépítésű hajtott forgóvázak esetében. A szétszerelések miatt természetesen a járművet hosszabb-rövidebb időre ki kell vonni a forgalomból is.

A modern járműüzem azt igényli, hogy egyrészt a járművek műszaki állapotának időbeli változása megfelelően követve legyen, másrészt hogy az esetleges üzemzavarok, vagy más okok által igényelt javítási műveletek várható időpontja a lehetőség szerint előre jelezve legyen. A járműpark jó kihasználása érdekében fontos, hogy a járművek ellenőrzési ideje megfelelően rövid legyen a forgalomban eltöltött időhöz viszonyítva, továbbá, hogy az ellenőrzések-mérések a lehetőségek szerint ne igényeljenek szétszerelési munkát. Végül a szükséges alkatrészcsereket úgy kell megszervezni, hogy azok a jármű nagyobb szerkezeti egységeinek – az ú. n. moduloknak – a cseréjével legyenek végrehajtva, pl. a vasúti futómű valamely hi-bája esetén az egész forgóváznak – a „futómű-modulnak” – a jól megszervezett, magas fokon

gépesített cseréje szükséges. Ez természetesen megköveteli a megfelelően kialakított javító csarnokot és kellő mennyiségű tartalék-modul tárolását is.

Ebben az Oktatási Segédletben mindenekelőtt vázlatosan bemutatjuk a vasúti járműdiagnosztika jelenlegi mérési-ellenőrzési gyakorlatát (2.2 fejezet), külön kiemeljük és részletesen ismertetjük a futóműdiagnosztikai méréseket és ellenőrzéseket (2.3 fejezet). Ezek után részletesen ismertetjük a rendszerdinamika felhasználási lehetőségeit mind a vasúti-, mind a közúti járműdiagnosztikában (2.4 fejezet), ezen belül áttekintjük a rendszerdinamika elméleti alapjait (2.4.1 fejezet), majd a rendszerdinamika felhasználási lehetőségeit mutatjuk be a járműüzem komplex szimulációjának folyamatában (2.4.2 fejezet). Végül a 2.5 fejezetben részletesen ismertetjük a járműüzem szimulációjának az alábbi legfontosabb eszközeit:

- a rendszerdinamikai modell felépítése megadott pályán való végigfutás szimulálására (2.5.1 és 2.5.2 fejezet);
- a rendszerdinamikai modell felépítése megadott pálya függőleges pályahibáin való végigfutás szimulálására (2.5.3 és 2.5.4 fejezet);
- a rendszerdinamikai modell felépítése megadott pálya keresztirányú pályahibáin való végigfutásra (2.5.5 és 2.5.6 fejezet),
- a dinamikai modell mozgásegyenleteinek numerikus megoldási lehetőségei (2.5.7 fejezet);
- a számított eredmények megjelenési formája és további felhasználási lehetőségei (2.5.8 fejezet).

2.2 A vasúti járműdiagnosztikában alkalmazott mérések. A futóműdiagnosztika fontossága

Amint azt már említettük, a járművek műszaki állapotának folyamatos ellenőrzése érdekében időről időre sok mérést kellene végrehajtanunk. Mivel a járművek alkatrészei, illetve fődarabjai általában eléggé különböző élettartamúak (annak ellenére, hogy sok járműtervezési-gyártási területen, pl. személyautók tervezésében és gyártásában sok erőfeszítést tesznek az ún. egyenlő élettartamra történő méretezési és gyártási elvek széleskörű alkalmazására), ezért a járműdiagnosztikai mérések időpontjainak is ezekhez az eléggé eltérő élettartamokhoz kell alkalmazkodniuk. A tapasztalati élettartamok alapján az elmúlt évtizedekben bevezettek bizonyos, tapasztalati ciklusidőközön alapuló diagnosztikai ellenőrzéseket, illetve méréseket, elsősorban inkább a gépi (főleg villamos) berendezések és a vezérlési rendszer ellenőrzésére. A mérési-ellenőrzési feladatok egyrészt villamos berendezésekre, illetve mennyiségekre, másrészt nem-villamos berendezésekre, illetve mennyiségekre vonatkoznak. Könnyen belátható, hogy a villamos berendezések mérési-ellenőrzési feladatainak végrehajtása alapján véve egyszerűbb, mint a nem-villamos berendezéseké, mivel a villamos jellemzők mérése általában közvetlenül végrehajtható a kereskedelmi forgalomban kapható műszerekkel, míg a nem-villamos berendezések mechanikai jellemzőit (hajtó nyomaték, fordulatszám, stb.) csak megfelelő, általában villamos mennyiséggé történő átalakítás után („mérőátalakítók”) lehet csak mérni, tárolni, értékelni. Így érthető, hogy pl. a vasúti járműgyárak a villamos jellemzők diagnosztikájának megkönnyítésére már jóideje felszerelték a modern járműveiket olyan automatikus mérőberendezésekkel, amelyek a kitűzött időpontokban megmérik, szükség esetén értékelik és tárolják a diagnosztikai jellemzőket, majd ezeket elektronikusan (hordozható PC, laptop, stb.) lehet kiolvasni. Sajnos, a nem-villamos berendezések jellemzőinek az ilyen fajta adatgyűjtése még várat magára.

A villamos berendezések mérési-ellenőrzési feladatai a következő nagyobb csoportokba sorolhatók:

a/ **Villamosmotorok, generátorok, általában a forgógépek mérése.** Ide tartozik a melegedés, a szigetelés, a csúszógyűrűk és kommutátorok ellenőrzése, nyomaték- és fordulatszám jelleggörbék felvétele. Ezek a mérések mind a javító műhelyben, a szükséges mértékű szét szerelés után hajthatók végre.

b/ **Transzformátorok, fokozatkapcsolók, megszakítók ellenőrzése.** Ezek a mérések is javítóműhelyt és kellő mértékű szét szerelést igényelnek.

A nemvillamos berendezések (dízelmotor, féklégkompresszor, féklégberendezések, stb.) fontosabb mérési-ellenőrzési feladatai az alábbiak:

a/ **Dízelmotorok ellenőrzése.** Ide tartozik a fajlagos gázolajfogyasztás mérése, kipufogógáz hőmérsékletének és koromtartalmának mérése, turbófeltöltők, befecskendező szivattyúk, kenőolaj- és hűtővízrendszer ellenőrzése.

b/ **Hidrodinamikus, mechanikus, stb. nyomatékmódosítók és tengelykapcsolók ellenőrzése.** Nyomaték-fordulatszám jelleggörbék, hatásfokgörbék felvétele.

c/ **A légfék és más, levegővel működő berendezések ellenőrzése.** Légsűrítők, fékezőszelepek, stb. ellenőrző mérései.

d/ **Forgóvázak, alvázak és szekrényvázak ellenőrző mérései.** Méretellenőrzés az alvázak, forgóvázak elcsavarodása szempontjából. Hegesztési varratok ellenőrzése (ahol a tapasztalatok szerint szükséges). A kerékterhelések eloszlásának ellenőrzése és szükség szerint korrekciója.

A felsorolt diagnosztikai mérések és ellenőrzések jó vasúttechnikai összefoglalását találhatjuk meg az Irodalomjegyzék [3]. számú kézikönyvében (Görbicz S. – Sasi I. – Vadász P.: Vasúti járművek minősítő mérései.) Az előző oldalon vázlatosan és kivonatatosan ismertettük ezeket a méréseket, illetve ellenőrzéseket, bővebb részleteket [3]-ban lehet találni. Az említett könyvben részletesen bemutatott, a jelenlegi diagnosztikai gyakorlathoz tartozó mérések és ellenőrzések a tapasztalat alapján megállapított ciklusidőknek megfelelően, javítóműhelyben, a szükséges mértékű szétszerelés után hajthatók végre. Két előírt ellenőrzési időpont között a jármű műszaki állapota nincs tehát ellenőrizve, egy ilyen ellenőrzés alkalmával tehát vagy azt találják, hogy a műszaki paraméterek változása már túlhaladt a megengedett mértéken és már korábban be kellett volna avatkozni, vagy azt, hogy még nem szükséges a beavatkozás. Ha sűrűtenék az ellenőrzéseket, akkor feltehetően finomabban lehetne nyomon követni a jármű műszaki állapotának változását, de a sűrűbb diagnosztikai ellenőrzések miatt a járművek karbantartási állásideje nagyon megnőne, másrészt a sok felesleges szétszerelés is számottevően ronthat bizonyos berendezések állapotán.

A korszerű járműdiagnosztikának mindenképpen az a célja, hogy a már bemutatott alapelveknek megfelelően sűrítsek az ellenőrzések időpontjait, de egyidejűleg olyan mérési módszereket is kell alkalmazni, amelyek egyrészt megfelelő, **állandóan beépített** érzékelőket használnak, másrészt a méréseket vagy kívülről, **szétszerelés nélkül**, egyszerűen csatlakoztatható, esetenként kézi mérőberendezéssel kell végrehajtani, vagy pedig a mérőberendezéseket is be kell építeni. Végül a méréseket meghatározott időközönként **automatikusan** kell végrehajtani, a mért adatokat **digitális alakban** kell tárolni („fekete doboz”), és ezeket kézi, hordozható eszközzel, megadott időközönként kell kiolvasni.

A már korábban idézett [3] forrásmű a 8.2.12 fejezetben vázlatosan bemutatja egy „komplex mérő- és diagnosztizáló berendezés” működési alapelveit. Ezek az alapelvek a következők:

- a komplex mérőberendezés lehetséges mértékű egységesítése;
- mérőátalakítók beépítése;
- méréspontváltó, vagyis a mérési adatokat az egyes mérőátalakítókról ciklikusan leolvasó mérési adatgyűjtő rendszer beépítése;
- jelértékelő és feldolgozó berendezés beépítése;
- a leolvasást vezérlő egység beépítése.

A könyv megmaradt az igények egyszerű felsorolásánál, a kiadási évet (1983) követő időszakban már egyes külföldi gyártmányú vasúti járműveket (mozdonyokat és személykocsikat) már felszereltek hasonló komplex mérőberendezéssel.

Ezen oktatási segédlet keretei között nem kívánunk részletesen foglalkozni a villamos berendezések mérési-ellenőrzési feladataival, valamint a nemvillamos berendezéseknek azokkal a mérési-ellenőrzési feladataival, amelyek az előbbi felsorolás a/, b/ és c/ pontjaiban vannak megemlítve. Ezek részletesen megtalálhatók a [3] forrásműben. A forgóvázak, alvázak és szekrényvázaknak a d/ pontban ismertetett ellenőrző mérései közül az alábbiakban a vasúti járművek futóművével fogunk részletesebben foglalkozni. A futóművek mérési-ellenőrzési feladatainak bemutatása során ki fogunk térni arra, hogy a korszerű járműdiagnosztikában az utóbbi egy-két évtizedben felmerült az igény fejlesztésre, vagy tökéletesítésre. Ilyen fejlesztési igény lehet az egyes mérési-ellenőrzési feladatok gyors, automatikus, szétszerelés nélküli végrehajtása, amelyet vagy a zavartalan járműüzem közben, vagy az üzem bizonyos szünetei közben, kijelölt vágányszakaszon való, megfelelően kis sebességgel való végighaladása alatt lehet végrehajtani (pl. a javító-karbantartó csarnokba való behaladás közben).

Az elmondottakkal kapcsolatban azt is érdemes hangsúlyozni, hogy a vasútüzemben jelenleg tapasztalható fejlesztések, korszerűsítések milyen megnövekedett igényeket támasztanak a futóművekkel szemben. A korszerű vasútüzem úgy akarja megoldani a jelenlegi áru- és személyszállítási feladatokat, továbbá úgy akar helytállni a vasút és más közlekedési ágazatok között fennálló versenyben, hogy viszonylag rövid szerelvényeket járat, sűrűbben és nagyobb sebességgel, hogy a célállomásra való eljutás idejét a lehetőség szerint csökkentse. Ebből következik, hogy a járművek sebességét jelentősen meg kell növelni, a járművek kihasználtságát szintén fokozni kell, végül a járművek üzemképességét megbízhatóan biztosítani kell a felfokozott igények között is.

A járműsebesség növelése kétséget kizáróan megnöveli a járművek alkatrészeinek igénybevételét, de elsősorban a futóművekéit. Még ha fel is tételezzük, hogy a futóművek megfelelően vannak méretezve, a diagnosztikai ellenőrzéseket jóval sűrűbben kell végrehajtani, mert a nagyobb igénybevételek feltehetően gyorsabban jelentkező károsodásokat (kopásokat, repedéseket) okozhatnak.

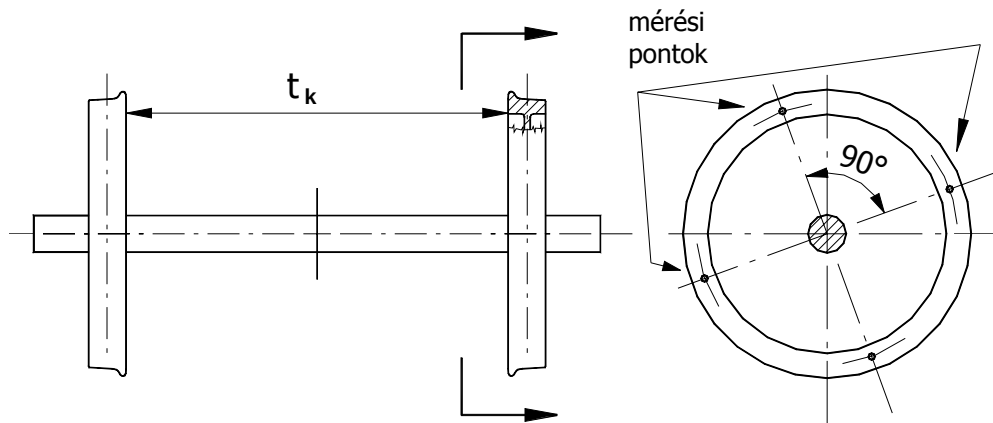
Ugyanakkor a diagnosztikai ellenőrzések időigényét minden eszközzel csökkenteni kell, megfelelően tervezett, gyártott és telepített automatikus mérőberendezéssel. Fontos, hogy ezek az ellenőrzések szétszerelés nélkül menjenek végbe, és a ellenőrzések eredménye megbízhatóan jelezze, ha a szétszerelés valóban szükséges.

Az alábbiakban sorra vesszük a forgóvázak – és elsősorban a futóművek – jelenleg használatos mérési-ellenőrzési műveleteit a [3] forrásmű által ajánlott sorrendben és módon, és az egyes ellenőrzések esetében kitérünk a korszerű jármű- és futóműdiagnosztika követelményeire is. Az egyes futóműdiagnosztikai mérési feladatok bemutatása során a felhasználható mérőberendezésekre csak utalni fogunk, a felhasználható korszerű mérőeszközökről bővebben a 3. és 4. Oktatási Segédletben (A metrológia a járműrendszerdiagnosztikában) találhatunk. Utalunk továbbá az 5. Oktatási Segédletben bemutatott 1:4 léptékű futóműdiagnosztikai próbapadra is, amely a BME Vasúti Járművek Tanszékén áll fejlesztés alatt, végül bemutatjuk a 7. Oktatási Segédletben a Német Szövetségi Vasutak ICE motorvonatainál alkalmazott karbantartási rendszert is.

2.3 Vasúti járművek futóműdiagnosztikai mérései

2.3.1 A kerékpárok keréktávolságának ellenőrzése

Ez a mérés a két kerékkoszorú közötti t_k távolságot ellenőrzi (2.1 ábra). Ezt a távolságot nevezik „felsajtolási méret”-nek is. Ezt a távolságot az abroncsok belső síkjai között a kerületen négy, egymástól 90° -ra elhelyezkedő pontban kell mérni.



2.1. ábra

Így négy darab, t_{k1} , t_{k2} , t_{k3} és t_{k4} távolságot kapunk. Ezek közül a legnagyobb érték:

$$t_{k,\max} = \text{Max} [t_{k1}, t_{k2}, t_{k3}, t_{k4}] ;$$

és a legkisebb:

$$t_{k,\min} = \text{Min} [t_{k1}, t_{k2}, t_{k3}, t_{k4}] ;$$

és az üzemkészség feltétele:

$$\Delta t = t_{k,\max} - t_{k,\min} \leq 1.5 \text{ mm}$$

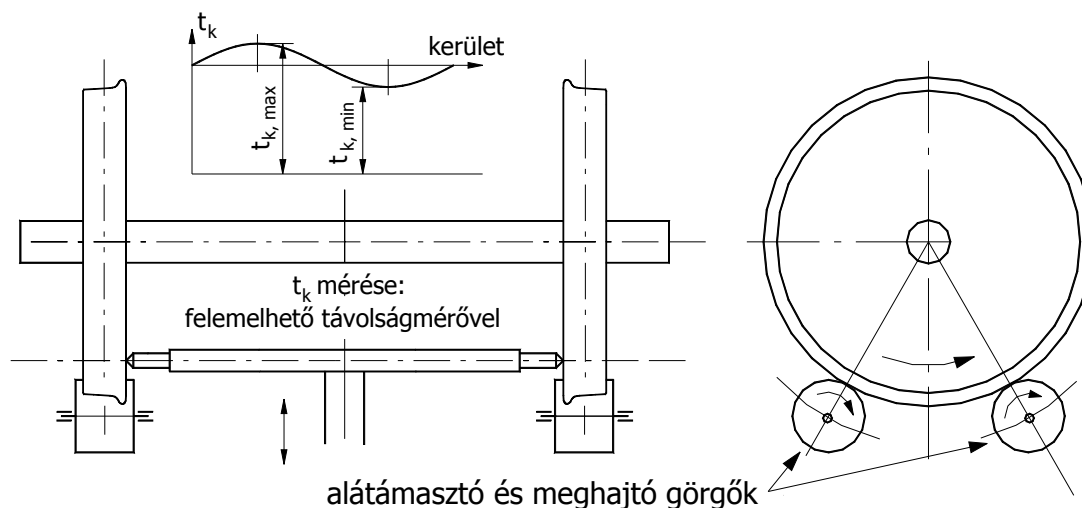
Mivel a kerület mentén a négy pont akárhol elhelyezkedhet, ezért nem biztos, hogy a valóságos két szélső értéket találják meg a diagnosztikai ellenőrzés során.

Egy további feltétel a közepes keréktávolságra vonatkozik:

$$\text{ha } \overline{t_k} = \frac{t_{k1} + t_{k2} + t_{k3} + t_{k4}}{4}, \text{ akkor :}$$

$$1357 \text{ mm} \leq \overline{t_k} \leq 1363 \text{ mm}$$

A keréktávolság ellenőrzésének egy lehetséges automatizálása az lehet, ha a kerékpárt a vágány egy megfelelően kiképzett szakaszán görgőpárokkal felemeljük a sínről, és a görgők által körbeforgatott kerekek közé távolságmérőt emelünk fel (pl. hidraulikus berendezéssel), amint az a 2.2 ábrán látható. Ebben az esetben a keresett t_k keréktávolságot az egész kerület mentén folytonos függvény alakjában kapjuk meg (lásd a 2.2 ábra baloldalán), mert a távolságmérő a keréktávolsággal arányos, folytonos, szinuszfüggvény-alakú villamos jelet ad, amely megfelelő léptékkel megadja a keréktávolság pillanatnyi értékét a kerékpár szögelfordulásának függvényében.

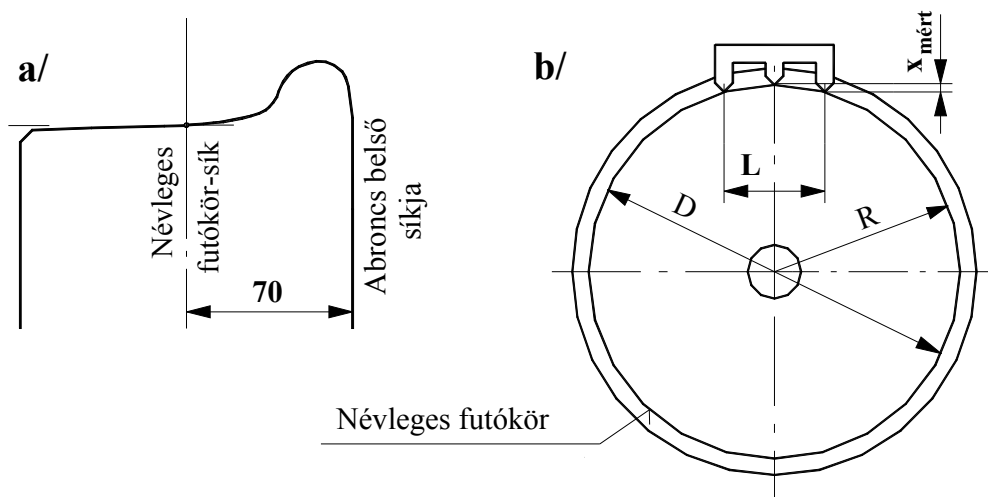


2.2 ábra

A szinuszfüggvény két szélső értéke (tehát a keréktávolság két szélső értéke) már megbízhatóan kiolvasható és az üzemkészség feltételének ellenőrzése az előbbiek szerint hajtható végre.

2.3.2 A futókörátmérő mérése

A futókörátmérőt a kerékabroncon az ú. n. névleges futókörsíkban mérhetjük, ami az abroncs belső síkjától 70 mm távolságban van (2.3 ábra a/ része). Azért névleges, mert a gördülés minden pillanatban más futókörsíkban történik.



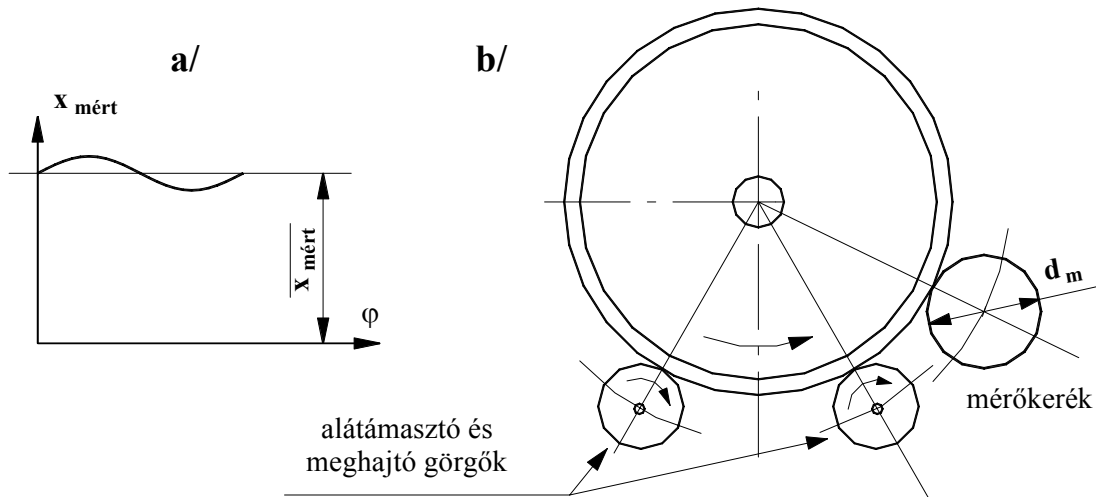
2.3 ábra

Az átmérő mérésének egyik lehetséges módja az ú. n. „**húrmérés**” (2.3 ábra b/ része). Ha a futókörátmérőn megmérjük az „L” hosszúságú húrhoz tartozó $x_{mért}$ húrmagasságot, akkor a futókör D átmérője:

$$D = 2 \cdot R = x_{mért} + \frac{L^2}{4 \cdot x_{mért}}$$

Álló kerék esetén legalább három kerületi pontban végre kell hajtani ezt a mérést.

A mérés automatizálásának egy lehetséges módja az lehet, ha a 2.4. ábrán bemutatott módon a kerékpárt az alátámasztó görgőkkel meghajtva az egész kerület mentén folytonosan mérjük az $x_{\text{mért}}$ húrmagasságot, ami által az $x_{\text{mért}}$ húrmagasságot a kerékpár φ körülfordulási szögének függvényében $x_{\text{mért}} = x_{\text{mért}}(\varphi)$ alakú függvény alakjában kapjuk (2.4. ábra a/ része), majd a kapott függvényt megfelelően átlagolva, az $x_{\text{mért}}$ eredményből kaphatjuk meg a kereket futó körátmérőt.



2.4 ábra

A futó körátmérő mérésének egy másik lehetséges módja az lehet, amit – többek között – a padlóalatti kerékesztergálásnál is alkalmaznak. A görgőkkel alátámasztott és meghajtott kerékpárhoz a 2.4. ábra b/ részén látható „ d_m ” átmérőjű mérőkeréket szorítanak, és megszámlálják a mérőkerék körülfordulásának „ n_m ” számát a mérendő kerékpár egy teljes körülfordulása alatt. Ekkor a futó kör átmérője:

$$D = n_m \cdot d_m$$

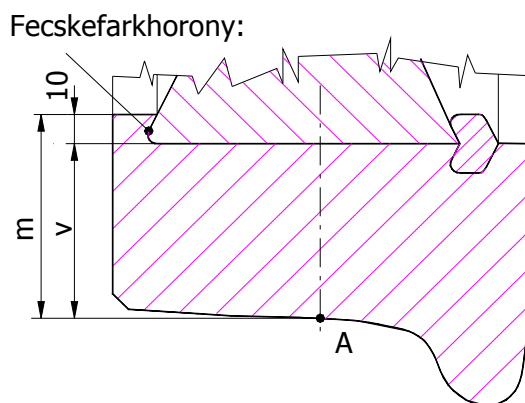
Az n_m körülfordulási számra így várhatóan nem egészszámot kapunk eredményül. Ezért a gyakorlatban a mérendő kereket többször (pl. 10-szer) forgatják körül.

Ha a mérést automatizálni akarjuk, a mérőkerék n_m körülfordulási száma helyett egy alkalmas optoelektronikus inkrementális szögelfordulásmérőt alkalmazhatunk (bővebben l. a 3. Oktatási Segédletben).

2.3.3 Az abroncsvastagság ellenőrzése

A vasúti kerékabroncs „ v ” vastagsága a kerékkopással csökken, de egy bizonyos minimális abroncsvastagság alatt az abroncsot és a keréktárcsát összekötő zsugorkötés meglazulhat, ezért az ellenőrzés elsősorban a balesetveszély elkerülésére szolgál. Az abroncs „ v ” vastagságának mérésére a [3] műben azt ajánlják (2.5 ábra), hogy az abroncs külső oldalsíkján kell megmérni sugárirányban a fecskefarkhorony látható külső pereme és az „A” pont közötti sugárirányú „ m ” távolságot, majd ebből az értékből le kell vonni a fecskefarkhorony 10 mm-es magasságát:

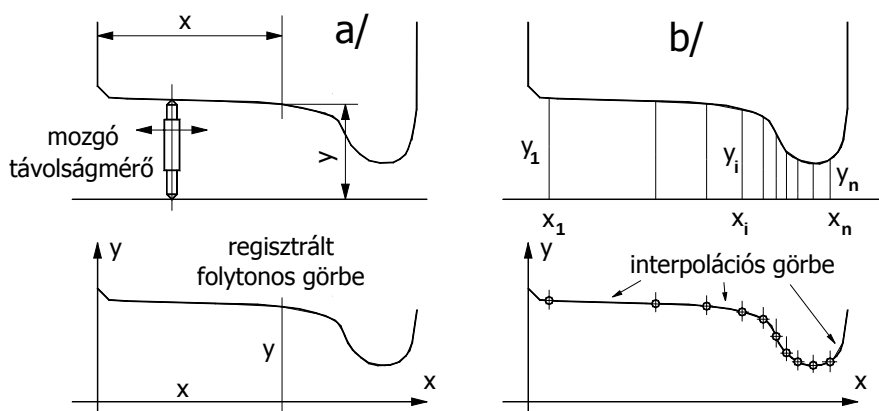
Egy másik lehetséges mérési mód az lehet, hogy megmérjük az aktuális névleges futó körátmérőt (az „A” ponthoz tartozó átmérőt), majd ebből levonjuk a keréktárcsa átmérőjét, végül ennek a felét vesszük.



2.5. ábra

2.3.4 A kerékprofil jellemzőinek ellenőrző mérései

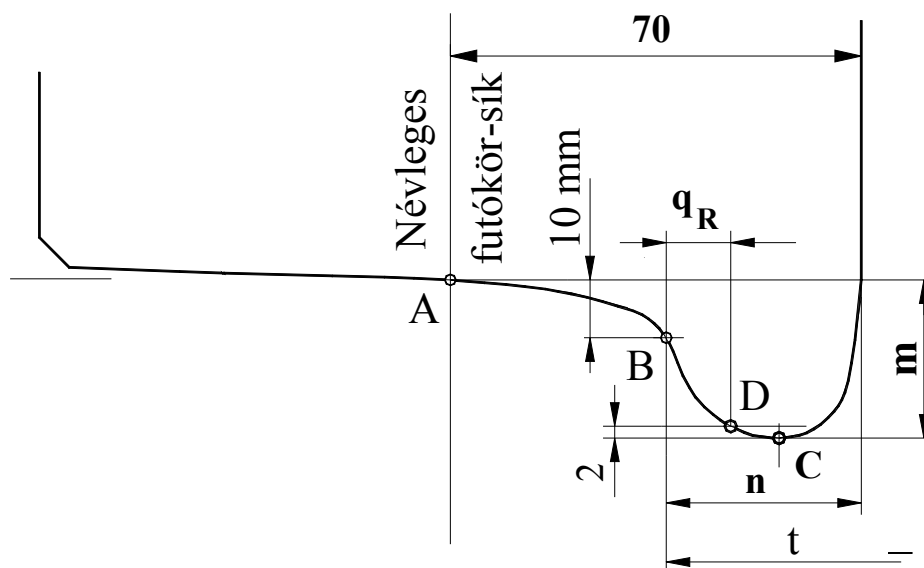
A kerékprofil jellemzőinek ellenőrző mérései mind a kerékprofil aktuális alakjának adatain alapulnak, tehát a kerékprofil aktuális alakját regisztrálni szükséges. A profil regisztrálásának egy lehetséges módja az, hogy az álló kerékpár mindkét kerekének profilja mentén a tengely irányában mozgó távolságérzékelőt vezetünk végig (2.6. ábra a/ része), és a érzékelt villamos jelből az ellenőrzendő kerékprofil $y=y(x)$ függvénygörbe alakjában kapjuk meg.



2.6. ábra

Egy másik lehetséges módszer az lehet, hogy a kerékprofilon csak néhány diszkrét pont x és y koordinátáját mérjük meg ($x_1, y_1, \dots, x_i, y_i, \dots, x_n, y_n$, 2.6. ábra b/ része), és ezekre a diszkrét pontokra megfelelő interpolációs eljárással folytonos görbét fektetünk; kihasználva azt, hogy a kerékprofil görbéje sima, folytonos görbe, tehát az egyes diszkrét pontok között nem lesznek hirtelen, éles változások.

A kerékprofilgörbe ismeretében több jellemző adatot, ill. méretet kell ellenőrizni. Ezeket a méreteket a 2.7. ábrán foglaltuk össze, ezek az adatok a következők:



2.7. ábra

a/ A „t” nyomszélesség. Ezt a méretet a két kerékprofil „B” pontjai közötti távolság adja meg, és a nyomkarima kopásából eredő karima-elvekonyodás ellenőrzésére szolgál. A „B” pont helyét úgy kapjuk meg, hogy a kerékabroncs belső síkjától tengelyirányban 70 mm-re meghatározzuk a névleges futókör-síkot, továbbá a futókör-síknak a kerékprofil-görbével képzett „A” metszéspontját. Majd az „A” ponthoz tartozó aktuális keréksugárnál 10 mm-rel nagyobb sugáron kijelöljük a kerékprofilon a „B” pontot. A kerékpár két kerékprofiljának „B” pontjai közötti távolság adja meg a „t” nyomszélesség értékét. A nyomszélességre vonatkozóan az alábbi üzemkészségi feltételeket kell teljesíteni:

ha a jármű sebessége $v < 100$ km/h, akkor $t \geq 1410$ mm;

$v > 100$ km/h, akkor $t \geq 1416$ mm.

ha az abroncs gyártási, vagy főjavított állapotban van, vagy újaesztergálták,

akkor $1424 \leq t \leq 1426$ mm

Sebességcsökkentési előírások az abroncsok túlzott elvékonyodása esetén:

ha $1408 \leq t \leq 1410$ mm, akkor $v_{\max} \leq 20$ km/h (nyílt pályán),

$v_{\max} \leq 5$ km/h (kitérőkön).

ha $t < 1408$ mm, a jármű **nem közlekedhet**.

Itt meg kell jegyezni, hogy a [3] forrásműben a **nyomszélesség** fogalmát helyenkint a **nyomtávolság** elnevezéssel illetik, tehát az elnevezés használata nem következetes.

b/ A nyomkarima „m” magassága. A nyomkarima „m” magasságán az „A” és a „C” pontokhoz tartozó keréksugarak különbségét értjük, ahol a „C” pont a nyomkarima tetőpontja. Ez a különbség a futófelület kopása következtében megnő, tehát a karima viszonylagos magassága is, így ez a magasság a kerékabroncs kopására is ad közvetett felvilágosítást. A jármű üzemkészségéhez a következő feltételeknek kell teljesülnie:

gyártási méret: $m = 28$ mm

üzem közben: $28 \leq m \leq 35$ mm

c/ A nyomkarima „n” vastagsága. A nyomkarima vastagsága a nyomkarima elvékonyodására ad felvilágosítást, ezért a vastagság megengedett alsó határa van előírva az üzemi-késztség feltételeként:

vontató jármű:	$v < 100 \text{ km/h}$:	$n \geq 24 \text{ mm}$
–,–	$v > 100 \text{ km/h}$:	$n \geq 27 \text{ mm}$
személy- és teherkocsik:		$n \geq 20 \text{ mm}$
RIV teherkocsik:		$n \geq 22 \text{ mm}$

Ha $n < 20 \text{ mm}$, a jármű saját kerékpárján nem közlekedhet.

d/ A „q_R” kritikus érintőpont-távolság. A jármű kisiklással szembeni biztonságát számottevően befolyásolja az ú. n. „nyomkarima felfutási szög”, ennek a nagyságát közvetve a „q_R” távolsággal lehet ellenőrizni. A tapasztalat szerint ez a távolság nem csökkenhet 6.5 mm alá:

$$q_R \geq 6.5 \text{ mm.}$$

A 2.3.1 – 2.3.4 pontokban felsorolt mérések a [3] forrásmű 13. fejezetében mint a javító-műhelyben, kellő mértékű szétszerelés után végrehajtható mérések vannak felsorolva. Az egyes mérések ismertetése során rendre megemlítettük, hogy milyen módon lehetne ezeket úgy automatizálni, hogy szétszerelés nélkül, megfelelő automatikus berendezéssel, megfelelően csekély időráfordítással legyenek végrehajthatók. Az 5. fejezetben erről részletesebben is lesz szó.

Már említettük, hogy a futóművek diagnosztikája esetében nem szabad elfelejtkezni a modern járműüzem egyre szigorodó feltételeiről. A járművek üzemében, különösen az üzembiztonságában a futóművek műszaki állapota is igen fontos szerepet játszik, és e szerep fontossága egyre nő. Itt elég, ha a nagysebességű vonatok futásbiztonságára utalunk. A korszerű, főleg a nagysebességű vonatok fokozott üzembiztonsága az előbb bemutatott ellenőrző mérésekhez képest sokkal kiterjedtebb ellenőrzéseket, illetve méréseket kíván meg, így a futóművek műszaki diagnosztikája igényli valószínűleg a legnagyobb mértékű reformokat, illetve átszervezéseket, elsősorban a sűrű időközökben végrehajtandó, szétszerelés nélküli ellenőrző mérések kidolgozásában és alkalmazásában.

A legfejlettebb vasutaknál (pl. Deutsche Bahn) már megtették az első lépéseket a korszerű futóműdiagnosztikai szempontok kidolgozásában és alkalmazásában. A nagysebességű ICE motorvonatok karbantartási rendszerét a 6. fejezetben részletesebben is bemutatjuk. Előljáróban annyit említünk meg, hogy alapelvük a rendszeres, előírt futáskm-hez tartozó átvizsgálás és méréssorozat, **szétszerelés nélkül**, és hiba észlelése esetén a jármű érintett egységét – pl. a futómű valamely hibája esetén a forgóvázat – **modulrendszerben cserélik**, hogy a jármű csak a modul cseréjéhez feltétlenül szükséges ideig álljon. Emellett elektronikusan rögzítik és tárolják az összes végrehajtott ellenőrzést és mérést, az észlelt hibát és alkatrészcsere-t, a jármű minden szükséges adatával, a dátummal, stb. együtt.

2.4 A rendszerdinamika a járműdiagnosztikában. Elméleti alapok

A 2.3 fejezetben bemutattuk a vasúti járművek futóműdiagnosztikai méréseinek néhány olyan automatizálási lehetőséget, amelyek nem igényelnek szétszerelési munkát. Sajnos, az így megmérhető adatok száma nem túl nagy. Általában sokkal több adat ismeretére volna szükség.

Ha nem tudjuk megoldani a többi adat szétszerelés nélküli megmérését, ezekre az adatokra a **rendszerdinamikán alapuló járműdiagnosztika** tud információt adni a járműüzem komplex szimulációjának segítségével. Ennek fontosságát és részleteit konferenciákon, folyóiratcikkekben, stb. több alkalommal is bemutattuk, pl. [1]-ben és [2]-ben. A továbbiakban összefoglaljuk a rendszerdinamika elméleti alapjait (2.4.1 fejezet), áttekintjük a járműüzem számításokkal történő leírását, a járműüzem szimulációját, a mozgásegyenletek felépítését, valamint a jármű üzemképességét meghatározó kritériumokat. A 2.5 fejezetben bemutatjuk, hogyan lehet figyelembe venni a jármű, a pálya és a környezet változását leíró adatokat akár az idő, akár a megtett út függvényében.

A **rendszerdinamika** szó két fogalmat jelöl:

- **rendszer:** ez azt jelenti, hogy a vizsgált gépet – jelen esetben a járművet – a környezetével együtt, egyetlen rendszerbe foglalva kell kezelni és vizsgálni. Járművek esetében ez azt jelenti, hogy a járművet nem szabad a pályától és a környezettől különválasztani, akár vasúti, akár közúti járműről is legyen szó, a jármű, a pálya és a környezet közötti kölcsönhatást mindig figyelembe kell venni,
- **dinamika:** ez azt jelenti, hogy az előbb említett pálya-jármű rendszer összetevői (elemei) között dinamikai kölcsönhatás áll fenn, tehát az elemek között felírandó függvénykapcsolatnak az időben folytonos változást kell tükröznie. Jármű és pálya esetében pl. a kocsiszekrény és a futómű között rugók és lengéscsillapítók (rugalmas és disszipatív elemek) képezik a kapcsolatot. A kapcsolati erőnek a rugók deformációerejének és a csillapítók csillapító erejének az időbeli változása a **Newton-törvénynek** megfelelően gyorsítja a szekrényt, illetve a futóművet.

Ebből következik, hogy a járművet és a pályát az ú. n. **rendszerdinamikai modell** képviseli. Ez a modell tartalmazza a pálya és a jármű minden tömegelemét, a tömegelemeket összekapcsoló rugókat és csillapítókat, továbbá az egyes elemek közötti dinamikai egyensúlyt megszabó differenciálegyenleteket (mozgásegyenleteket), amelyekben az egyes elemek között ható kapcsoló erők a rugók deformációerejéből és a csillapítók disszipatív (csillapító) erejéből tevődnek össze. Végül a környezet bizonyos egyéb feltételei, pl. a kerekek és a pálya közötti érintkezést biztosító nyomóerő és annak változása a pálya egyenlőtlenégeinek függvényében, a pályára megengedett sebesség változása az út függvényében, stb. szintén a rendszerdinamikai modellhez tartoznak.

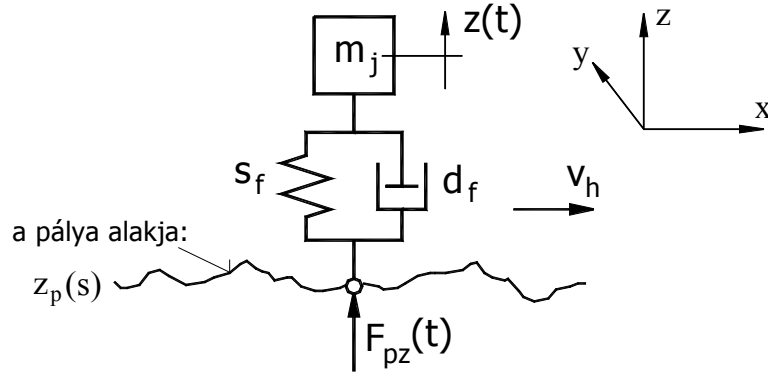
A **rendszerdinamikai modell** felhasználásával végrehajthatjuk a **járműüzem komplex szimulációját**. E szimuláció eredményei fognak segítséget nyújtani a járműdiagnosztikai problémáink megoldásához.

A **járműüzem szimulációja** abból áll, hogy meghatározzuk a pálya-jármű rendszer dinamikai modelljéhez tartozó differenciálegyenletrendszer (mozgásegyenletrendszer) megoldásfüggvényeit arra a gerjesztésre, amelyet az üzemi, illetve környezeti előírások által a jármű mozgására megszabott kezdeti és egyéb feltételek, a jármű és a pálya paraméterei (adatai), stb. képviselnek. Ezeknek a differenciálegyenleteknek (mozgásegyenleteknek) a felépítését, szerkezetét tekintjük át az alábbiakban (2.4.1 fejezet). Ezt követően levezetjük a mozgás-

egyenletrendszer mátrix-vektoros alakját (2.4.2 fejezet). Majd a dinamikai modell **A** rendszer-mátrixának felépítésével lehetőség nyílik a dinamikai modell sajátfrekvenciáinak meghatározására (2.4.3 fejezet), továbbá a 2.4.4 fejezetben a járműrendszerdiagnosztikához szükséges paramétervektort és kritériumvektort vezetjük le, illetve segítségével eldönthetjük, hogy a jármű üzemkész-e, vagy sem.

2.4.1 A mozgásegyenletek szerkezete

A mozgásegyenleteket (differenciálegyenleteket) egy igen nagy mértékben, **egyszabadság-fokúvá** leegyszerűsített járműmodell segítségével mutatjuk be (2.8 ábra):



2.8 ábra

Ebben az egyszerű modellben a járműnek kizárólag a függőleges (rázó) z -irányú mozgását vesszük figyelembe, ezért a jármű szekrényét egyetlen tömeg, $\mathbf{m}_j$ képviseli (a futómű tömegét $\mathbf{m}_j$ mellett elhanyagoljuk, illetve belefoglaljuk $\mathbf{m}_j$ -be). A pálya függőleges alakját (a függőleges pályasüppedéseket) a méréssel meghatározott $\mathbf{z}_p(s)$ függvény írja le az s megtett út függvényében. Ha a jármű állandó $\mathbf{v}_h$ sebességgel halad, akkor a $\mathbf{z}_p(s)$ függvényt időfüggvénné alakíthatjuk át:

ha $s = v_h \cdot t$, akkor $\mathbf{z}_p(s) = \mathbf{z}_p(v_h \cdot t) = \mathbf{z}_p^*(t)$, ez a függvény az időtől fog függni. A hordmúról az $\mathbf{m}_j$ tömegre ható erő az $\mathbf{F}_{rugó}$ rugóerőből és az $\mathbf{F}_{csill}$ csillapítóerőből áll, amelyek a $\mathbf{z}(t)$ szekrényelmozdulás és a $\mathbf{z}_p^*(t)$ pályaalak különbségétől, illetve ezek időszerinti első deriváltjainak különbségétől fognak függeni:

$$F_{rugó} = -s \cdot [z(t) - z_p^*(t)] = -s \cdot z(t) + s \cdot z_p^*(t)$$

$$F_{csill}(t) = -d \cdot \left[\frac{d}{dt} z(t) - \frac{d}{dt} z_p^*(t) \right] = -d \cdot \dot{z}(t) + d \cdot \dot{z}_p^*(t)$$

Ekkor az $\mathbf{m}_j$ tömegre ható erők dinamikus egyensúlya Newton II. törvénye szerint:

$$\sum F = m_j \cdot a, \text{ ennek alapján:}$$

$$F_{rugó}(t) + F_{csill}(t) = m_j \cdot \frac{d^2}{dt^2} z(t) = m_j \cdot \ddot{z}(t)$$

Behelyettesítve:

$$-s \cdot z(t) + s \cdot z_p^*(t) - d \cdot \dot{z}(t) + d \cdot \dot{z}_p^*(t) = m_j \cdot \ddot{z}(t)$$

A szokásos módon rendezve a mozgásegyenletet, kapjuk:

$$m_j \ddot{z}(t) + d \dot{z}(t) + s z(t) = d \dot{z}_p^*(t) + s z_p^*(t)$$

A jobboldalon álló gerjesztőerő-összetevőket egyetlen gerjesztőerőként jelölhetjük:

$$F_{pz}(t) = d \dot{z}_p^*(t) + s z_p^*(t)$$

Így végül a mozgásegyenlet:

$$m_j \ddot{z}(t) + d \dot{z}(t) + s z(t) = F_{pz}(t)$$

Ez a mozgásegyenlet nagyon sok egyszerűsítést tartalmaz. A két legfontosabb egyszerűsítés a következő:

a/ A dinamikai modell szabadságfoka egy, tehát egyetlen mozgásfajtát lehet vele vizsgálni (jelen esetben a függőleges $\mathbf{z}(\mathbf{t})$ rázást). Az üzemi gyakorlatban használt járművek sok tömegelemből állnak, amelyek mindegyike többféle mozgást is végezhet. Emiatt a bemutatott egy-szabadságfokú modellt csak közelítő, előzetes vizsgálathoz használhatjuk.

A gyakorlatban felmerülő problémák pontosabb vizsgálatára mindenképpen összetettebb, nagyobb szabadságfokú ($N \gg 1$) dinamikai modellt kell felépíteni és alkalmazni, erről részleteket a 2.5 fejezetben találhatunk.

Ha a szabadságfok N , a dinamikai modell mozgását is N db mozgásegyenlet (általában másodrendű, állandó együtthatós, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet) írja le. Ezek szerkezete hasonló a bemutatott mozgásegyenlethez.

b/ A bemutatott egyszabadságfokú modellben a rugó és a lengéscsillapító jelleggörbét lineárisnak tételeztük fel ($s = \text{áll}$ rugómerevség és $d = \text{áll}$ csillapítási együttható). Így a $\mathbf{z}$ elmozdulás és a $\dot{\mathbf{z}}$ sebesség (a nulladik és az első derivált) első hatványon van és állandó együtthatóval van megszorozva, ezért nevezzük a modellt **lineárisnak**. Nem szorul különösebb indokolásra, hogy a gyakorlatban ez a linearitás igen ritkán valósul meg, pl. acél csavarrugók jelleggörbéje ilyen (ha a menetek felütközéséig való összenyomódását nem is vesszük számításba), de a gumirugók jelleggörbéjében csaknem mindig meglévő progresszivitás, a laprugók jelleggörbéjének hiszterézis-hurka, valamint az alkalmazott lengéscsillapítók degresszív jelleggörbéje már egyre nagyobb megalkuvásokkal közelíthető lineáris jelleggörbével.

Ha viszont sikerül bizonyos egyszerűsítő feltételezésekkel a jelleggörbét lineáris karakterisztikával helyettesíteni, ez sok könnyebbséget jelent pl. sajátfrekvenciák, lengésképek, stb. meghatározásában, ez magyarázhatja, hogy a dinamikai vizsgálatokban sok erőfeszítést tesznek a valóságos járművek dinamikai modelljének lineárisra való transzformálására.

Ha a bemutatott egyszabadságfokú modell helyett nagyobb szabadságfokú, igényesebb ($N \gg 1$) modellt építünk fel, ez azt jelenti, hogy N -féle mozgást vizsgálunk, így ezeket az $\mathbf{x}_1(\mathbf{t}), \mathbf{x}_2(\mathbf{t}), \dots, \mathbf{x}_i(\mathbf{t}), \dots, \mathbf{x}_N(\mathbf{t})$ függvények fogják leírni, tehát a modell mozgásait is N db mozgásegyenlet (differenciálegyenlet) fogja leírni. Ebben az egyenletrendszerben minden egyenlet tartalmaz egy tömeg-gyorsulás szorzatot. A tömeg és a gyorsulás indexe megegyezik az egyenlet sorszámával (indexével), így az i -ik egyenletben $m_i \ddot{x}_i$ található. Ez hasonló volt az egyszabadságfokú modell mozgásegyenletében is:

$$\begin{aligned}
& m_1 \ddot{x}_1 + d_{11} \dot{x}_1 + \dots + d_{1i} \dot{x}_i + \dots + d_{1N} \dot{x}_N + s_{11} x_1 + \dots + s_{1i} x_i + \dots + s_{1N} x_N = g_1(t) \\
& \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
& \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
& m_i \ddot{x}_i + d_{i1} \dot{x}_1 + \dots + d_{ii} \dot{x}_i + \dots + d_{iN} \dot{x}_N + s_{i1} x_1 + \dots + s_{ii} x_i + \dots + s_{iN} x_N = g_i(t) \\
& \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
& \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
& m_N \ddot{x}_N + d_{N1} \dot{x}_1 + \dots + d_{Ni} \dot{x}_i + \dots + d_{NN} \dot{x}_N + s_{N1} x_1 + \dots + s_{Ni} x_i + \dots + s_{NN} x_N = g_N(t) ;
\end{aligned}$$

A többszabadságfokú modell mozgásegyenleteiben viszont sokkal több „csillapítási tényező – sebesség” szorzat és „rugómerevség – elmozdulás” szorzat található. Ennek az az oka, hogy – elvileg – minden két tömeg között lehetséges lengéscsillapító és rugó kapcsolat, és mivel a csillapítási erő mindig sebességkülönbségtől, a rugalmas erő mindig elmozduláskülönbségtől függ, így összesen $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ „csillapítási tényező – sebességkülönbség”, illetve „rugómerevség – elmozduláskülönbség” szorzat fog előfordulni a mozgásegyenletekben. (A gyakorlatban természetesen nem mindegyik létezik, a nemlétező kapcsolatokhoz zérus csillapítási együttható és rugómerevség fog tartozni. Ilyen konkrét eseteket a 2.5.2 fejezet tárgyal részletesen.) Emiatt van kettős indexe a $\mathbf{d}_{i,j}$ csillapítási együtthatóknak és az $\mathbf{s}_{i,j}$ rugómerevségeknek. Az első index az egyenlet indexe, a második a kapcsolt tömegelemhez tartozó egyenlet indexe. Bővebbet az említett 2.5.2 fejezet példáiban találhatunk. (A gyakorlati példákban látható lesz az is, hogy pl. a $d_{i,j} \dot{x}_i$, illetve az $s_{i,j} x_i$ szorzatok tartalmazhatnak még geometriai adatokat is, pl. szögelfordulások sugara, stb. Az általános bevezetőben a $\mathbf{d}_{i,j}$ –ket, illetve $\mathbf{s}_{i,j}$ –ket úgy tekintjük, mint amelyek az esetleges geometriai adatokat is tartalmazzák.

Az i -ik mozgásegyenlet jobboldalán álló $\mathbf{g}_i(t)$ gerjesztő erő az $\mathbf{m}_i$ tömegre hat erőt jelentik, ha nem hat a tömegre külső erő, a gerjesztés értelemszerűen zérus.

Ha a szabadságfok nagy (20 – 30), a mozgásegyenleteknek nemcsak a darabszáma nagy, hanem egy-egy egyenlet hossza is a sok tag miatt. Belátható, hogy célszerű valamilyen praktikus, tömörebb felírási módot találni. Erre a mátrix-vektoros forma a legmegfelelőbb.

2.4.2 A mozgásegyenletek mátrix-vektoros alakja

A nagyobb szabadságfokok, ill. a nagy tagszám miatt az írásmunka egyszerűsítésére vezetünk be egy alkalmas **mátrix-vektoros** írásmódot. Mindenekelőtt tekintsük az egyenletrendszernek a „tömeg-gyorsulás” szorzatokból álló részét:

$$\begin{aligned}
& m_1 \ddot{x}_1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
& \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
& \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
& m_i \ddot{x}_i \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
& \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
& \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
& m_N \ddot{x}_N \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} m_{1,1} \ddot{x}_1 + m_{1,2} \ddot{x}_2 + \dots + m_{1,j} \ddot{x}_i + \dots + m_{1,N} \ddot{x}_N \\ m_{2,1} \ddot{x}_1 + m_{2,2} \ddot{x}_2 + \dots + m_{2,j} \ddot{x}_i + \dots + m_{2,N} \ddot{x}_N \\ \dots \\ m_{i,1} \ddot{x}_1 + m_{i,2} \ddot{x}_2 + \dots + m_{i,j} \ddot{x}_i + \dots + m_{i,N} \ddot{x}_N \\ \dots \\ m_{N,1} \ddot{x}_1 + m_{N,2} \ddot{x}_2 + \dots + m_{N,j} \ddot{x}_i + \dots + m_{N,N} \ddot{x}_i \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,N} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,j} & \dots & m_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{i,1} & m_{i,2} & \dots & m_{i,j} & \dots & m_{i,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{N,1} & m_{N,2} & \dots & m_{N,j} & \dots & m_{N,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \dots \\ \ddot{x}_i \\ \dots \\ \ddot{x}_N \end{bmatrix} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\ddot{x}}}$$

ahol $\underline{\underline{M}}$ NxN méretű négyzetes mátrix, a neve **tömeg-mátrix**, $\underline{\underline{\ddot{x}}}$ pedig a vizsgált mozgások gyorsulásainak oszlopvektora, a neve **gyorsulás-vektor**. (Ellenőrizhető, hogy az $\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\ddot{x}}}$ szorzat kifejtésével visszkapjuk a vizsgált egyenletrendszer tömeg-gyorsulás szorzatait!)

A gyakorlatban előforduló dinamikai modellek túlnyomó többsége (ilyenek a 2.5.2 fejezetben bemutatott modellek is) közönséges differenciálegyenlettel írható le, ahol $\mathbf{m}_{i,j} = 0$, ha $i \neq j$, és $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$, tehát a tömegmátrix ú. n. **diagonálmátrix**, mert csak a főátlóban van zérustól különböző eleme:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & ** & 0 & ** & 0 \\ 0 & m_2 & ** & 0 & ** & 0 \\ ** & ** & ** & ** & ** & ** \\ 0 & 0 & ** & m_i & ** & 0 \\ ** & ** & ** & ** & ** & ** \\ 0 & 0 & ** & 0 & ** & m_N \end{bmatrix}$$

ahol az egyszerűsítés kedvéért a kettős indexről azért tértünk át az egyes indexre, mert a diagonálmátrixban csak a főátlóban vannak zérustól különböző elemek, ahol mindkét index úgyszólván azonos. Az $\underline{\underline{\ddot{x}}}$ gyorsulásvektor:

$$\underline{\underline{\ddot{x}}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ ** \\ \ddot{x}_i \\ ** \\ \ddot{x}_N \end{bmatrix} = [\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dots, \ddot{x}_i, \dots, \ddot{x}_N]^T$$

Mivel a bemutatott mátrix-vektor szorzatokban a vektorok alapértelmezése oszlopvektor, emiatt a nyomtatott szövegekben az oszlopvektorok kinyomtatásához sok sor lenne szükséges, így a gyakorlatban az oszlopvektorok transzponált alakját szokták nyomtatni, mivel ez sorvektor, tehát egyetlen sorba lehet írni. A transzpozíciót a **T** felső index jelzi.

A mozgásegyenletrendszer második része a „csillapítási együttható – sebesség” szorzatokat tartalmazza: $d_{i,j} \cdot \dot{x}_i$, $i=1,\dots,N$ és $j=1,\dots,N$. Amint azt a bevezetőben már említettük, elvileg bármelyik két tömeg között lehet rugalmas, illetve disszipatív kapcsolat, innen ered a kettős index. Teljesen hasonló gondolatmenettel írhatjuk:

$$\begin{bmatrix} d_{1,1} \cdot \dot{x}_1 + d_{1,2} \cdot \dot{x}_2 + \dots + d_{1,j} \cdot \dot{x}_i + \dots + d_{1,N} \cdot \dot{x}_N \\ d_{2,1} \cdot \dot{x}_1 + d_{2,2} \cdot \dot{x}_2 + \dots + d_{2,j} \cdot \dot{x}_i + \dots + d_{2,N} \cdot \dot{x}_N \\ \text{****} \\ d_{i,1} \cdot \dot{x}_1 + d_{i,2} \cdot \dot{x}_2 + \dots + d_{i,j} \cdot \dot{x}_i + \dots + d_{i,N} \cdot \dot{x}_N \\ \text{****} \\ d_{N,1} \cdot \dot{x}_1 + d_{N,2} \cdot \dot{x}_2 + \dots + d_{N,j} \cdot \dot{x}_i + \dots + d_{N,N} \cdot \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \text{***} & d_{1,j} & \text{***} & d_{1,N} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \text{***} & d_{2,j} & \text{***} & d_{2,N} \\ & & \text{****} & & & \\ d_{i,1} & d_{i,2} & \text{***} & d_{i,j} & \text{***} & d_{i,N} \\ & & \text{****} & & & \\ d_{N,1} & d_{N,2} & \text{***} & d_{N,j} & \text{***} & d_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \text{**} \\ \dot{x}_i \\ \text{**} \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\dot{x}}$$

ahol a $\underline{\underline{D}}$ mátrix neve: **csillapítási mátrix:**

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \text{***} & d_{1,j} & \text{***} & d_{1,N} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \text{***} & d_{2,j} & \text{***} & d_{2,N} \\ & & \text{****} & & & \\ d_{i,1} & d_{i,2} & \text{***} & d_{i,j} & \text{***} & d_{i,N} \\ & & \text{****} & & & \\ d_{N,1} & d_{N,2} & \text{***} & d_{N,j} & \text{***} & d_{N,N} \end{bmatrix}$$

és az $\underline{\dot{x}}$ vektor neve: **sebességvektor:**

$$\underline{\dot{x}} = [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \text{***} \ \dot{x}_i \ \text{***} \ \dot{x}_N]^T$$

Az egyenletrendszer baloldalának maradék-része, a „rugómerevség – elmozdulás” szorzatok formailag hasonló elrendezésűek a „csillapítási tényező – sebesség” szorzatokkal, ezért értelemszerűen írható:

$$\begin{bmatrix} s_{1,1} \cdot x_1 + s_{1,2} \cdot x_2 + \dots + s_{1,j} \cdot x_i + \dots + s_{1,N} \cdot x_N \\ s_{2,1} \cdot x_1 + s_{2,2} \cdot x_2 + \dots + s_{2,j} \cdot x_i + \dots + s_{2,N} \cdot x_N \\ \text{****} \\ s_{i,1} \cdot x_1 + s_{i,2} \cdot x_2 + \dots + s_{i,j} \cdot x_i + \dots + s_{i,N} \cdot x_N \\ \text{****} \\ s_{N,1} \cdot x_1 + s_{N,2} \cdot x_2 + \dots + s_{N,j} \cdot x_i + \dots + s_{N,N} \cdot x_N \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & *** & s_{1,j} & *** & s_{1,N} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & *** & s_{2,j} & *** & s_{2,N} \\ & & **** & & & \\ s_{i,1} & s_{i,2} & *** & s_{i,j} & *** & s_{i,N} \\ & & **** & & & \\ s_{N,1} & s_{N,2} & *** & s_{N,j} & *** & s_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ** \\ x_i \\ ** \\ x_N \end{bmatrix} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{x}$$

ahol az $\underline{\underline{S}}$ mátrix neve: **merevségi mátrix:**

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & *** & s_{1,j} & *** & s_{1,N} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & *** & s_{2,j} & *** & s_{2,N} \\ & & **** & & & \\ s_{i,1} & s_{i,2} & *** & s_{i,j} & *** & s_{i,N} \\ & & **** & & & \\ s_{N,1} & s_{N,2} & *** & s_{N,j} & *** & s_{N,N} \end{bmatrix}$$

és az $\underline{\dot{x}}$ vektor neve: **sebességvektor:**

$$\underline{\dot{x}} = [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dots \ \dot{x}_i \ \dots \ \dot{x}_N]^T$$

Végül az egyenletrendszer jobboldalán álló gerjesztő erőket is egy oszlopvektorba foglalhatjuk össze, ez a $\underline{g}(t)$ **gerjesztés-vektor:**

$$\underline{g}(t) = [g_1(t), \ g_2(t), \dots, g_i(t), \dots, g_N(t)]^T$$

Mivel a már bemutatott $\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\ddot{x}}$, $\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\dot{x}}$ és $\underline{\underline{S}} \cdot \underline{x}$ mátrix-vektor szorzatok eredménye egy-egy N-elemű oszlopvektor, ezeket összeadva írhatjuk:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\ddot{x}} + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\dot{x}} + \underline{\underline{S}} \cdot \underline{x} = \underline{g}(t)$$

(Ellenőrizhető, hogy a szorzatokat kifejtve visszakapjuk a kiindulási differenciálegyenlet-rendszert!)

Ez a mátrix-vektoros forma pontosan képviseli a tárgyalt másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, inhomogén differenciálegyenletrendszert. Bizonyos felhasználási célokra, pl. sajátfrekvenciák meghatározása, az egyenletrendszer megoldása valamilyen alkalmas numerikus módszerrel, stb. célszerű még további átalakításokat is végrehajtani. Ezeket az átalakításokat mutatjuk be az alábbiakban.

2.4.3 Sajátértékek, sajátvektorok, sajátfrekvenciák

A sajátfrekvenciákat az $\mathbf{A}$ rendszermátrix sajátértékeiből határozhatjuk meg. Építsük fel a dinamikai modell $\mathbf{A}$ rendszermátrixát. Ebből a célból vezessük be az $\underline{y}$ **állapotvektor** fogalmát. Ez a vektor egyidőben tartalmazza az $\underline{\dot{x}}$ **sebességvektort** és az $\underline{x}$ **elmozdulásvektort** egy **hipervektor** formájában. (A hipervektor olyan vektor, amelynek az elemei is vektorok.):

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{x}} \\ - \\ \underline{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{x}} & | & \underline{x} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_i, \dots, \dot{x}_N & | & x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N \end{bmatrix}^T$$

Fejezzük ki a differenciálegyenletrendszer mátrix-vektoros alakjából az $\underline{\ddot{x}}$ **gyorsulásvektort**. Az eredeti alak:

$$\underline{\underline{M}}.\underline{\ddot{x}} + \underline{\underline{D}}.\underline{\dot{x}} + \underline{\underline{S}}.\underline{x} = \underline{g}(t)$$

Mivel az $\underline{\underline{M}}$ mátrixszal nem lehet osztani, bővítsük az egyenlet minden tagját a mátrix $\underline{\underline{M}}^{-1}$ inverzével:

$$\underline{\underline{M}}^{-1}.\underline{\underline{M}}.\underline{\ddot{x}} + \underline{\underline{M}}^{-1}.\underline{\underline{D}}.\underline{\dot{x}} + \underline{\underline{M}}^{-1}.\underline{\underline{S}}.\underline{x} = \underline{\underline{M}}^{-1}.\underline{g}(t)$$

Mivel egy négyzetes mátrixnak és az inverzének a szorzata az $\underline{\underline{E}}$ **egységmátrix** (amely olyan diagonálmátrix, amelynek a főátlójában minden elem **1**, a többi elem viszont mind zérus), ezért:

$$\underline{\underline{M}}^{-1}.\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{E}}$$

és $\underline{\underline{M}}^{-1}.\underline{\underline{M}}.\underline{\ddot{x}} = \underline{\underline{E}}.\underline{\ddot{x}} = \underline{\ddot{x}}$, így végül írható:

$$\underline{\ddot{x}} = -\underline{\underline{M}}^{-1}.\underline{\underline{D}}.\underline{\dot{x}} - \underline{\underline{M}}^{-1}.\underline{\underline{S}}.\underline{x} + \underline{\underline{M}}^{-1}.\underline{g}(t)$$

Az $\underline{\underline{A}}$ **rendszer mátrix** felépítéséhez mindenekelőtt egészítsük ki az $\underline{\ddot{x}}$ kifejezését az alábbi módon:

$$\underline{\ddot{x}} = -\underline{\underline{M}}^{-1}.\underline{\underline{D}}.\underline{\dot{x}} - \underline{\underline{M}}^{-1}.\underline{\underline{S}}.\underline{x}$$

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{E}}.\underline{\dot{x}} + \underline{\underline{O}}.\underline{x}$$

(A gerjesztéshez tartozó $\underline{\underline{M}}^{-1}.\underline{g}(t)$ tagot azért hagytuk el, mert a sajátfrekvenciák meghatározásához szükségtelen, a sajátfrekvenciák a gerjesztéstől függetlenek – legalábbis lineáris dinamikai modell esetén.)

A hozzáadott $\underline{\dot{x}}$ kifejezés jobboldalán az $\underline{\underline{E}}.\underline{\dot{x}}$ tag értéke $\underline{\dot{x}}$, mert $\underline{\dot{x}}$ az egységmátrixszal van szorozva, míg az $\underline{\underline{O}}$ zérusmátrixnak (minden eleme zérus) és az $\underline{x}$ -nek szorzata így az $\underline{0}$ zérusvektor, tehát a második egyenlet azonosság: $\underline{\dot{x}} \equiv \underline{\dot{x}}$. Viszont ha a két egyenletet tagonként egy-egy oszlopvektorba foglalkoz össze, akkor írható:

$$\begin{bmatrix} \underline{\ddot{x}} \\ - \\ \underline{\dot{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{\underline{M}}^{-1}.\underline{\underline{D}}.\underline{\dot{x}} & | & -\underline{\underline{M}}^{-1}.\underline{\underline{S}}.\underline{x} \\ \underline{\underline{E}}.\underline{\dot{x}} & | & \underline{\underline{O}}.\underline{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{\underline{M}}^{-1}.\underline{\underline{D}}. & | & -\underline{\underline{M}}^{-1}.\underline{\underline{S}}. \\ - & | & - \\ \underline{\underline{E}} & | & \underline{\underline{O}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{x}} \\ - \\ \underline{x} \end{bmatrix}$$

Behelyettesítve az $\underline{y}$ állapotvektort, írható:

$$\dot{\underline{y}} = \left[\begin{array}{c|c} -\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{D}} & -\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{S}} \\ \hline \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{O}} \end{array} \right] \underline{y} = \underline{\underline{A}} \underline{y}$$

A 2×2 méretű **A** mátrix **hipermátrix**, mivel minden eleme $N \times N$ méretű mátrix (meg-egyezően az **M**, a **D** és az **S** mátrixok méretével). Az **A** mátrixot **rendszer-mátrixnak** nevezik.

Ha az $\underline{y}$ állapotvektort úgy állítjuk össze, hogy a sebességvektor elemeit új változókkal, a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_i, \dots, \underline{v}_N$ -nel helyettesítjük, akkor az állapotvektor alakja:

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \underline{x} \end{bmatrix} = [\underline{v} \mid \underline{x}]^T = [v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_N \mid x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N]^T$$

és ekkor az $\dot{\underline{y}} = \underline{\underline{A}} \underline{y}$ mátrix-vektor egyenlet a bemutatott másodrendű, N egyenletből álló differenciálegyenletrendszer **elsőrendű differenciálegyenletek** $2 \times N$ darab egyenletből álló rendszerévé konvertált alakját adja meg, amelynek a változói $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_i, \dots, \underline{v}_N, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_i, \dots, \underline{x}_N$. Ennek az átalakításnak az egyik fontos oka, hogy a numerikus megoldáshoz használt programkönyvtári programok elsőrendű egyenleteket igényelnek, a másik oka, hogy az **A** rendszer-mátrixból lehet meghatározni a sajátfrekvenciákat, lengésképeket, stb.

A sajátfrekvenciák meghatározásához szükség van az elsőrendű egyenletek megoldására, amelyet $\underline{y} = e^{\lambda t}$ alakban keresünk. (Az exponenciális függvény az egyetlen olyan függvény, amelynek a deriváltjai csak állandó együtthatóban különböznek az alapfüggvénytől.) Így az i -ik változóra a megoldás:

$$y_i = h_i \cdot e^{\lambda t}$$

ahol h_i állandó együttható. Ha $2 \times N$ változó van, vektoros alakot alkalmazhatunk:

$$\underline{y} = \underline{h} \cdot e^{\lambda t}$$

amelynek deriváltja:

$$\dot{\underline{y}} = \lambda \cdot \underline{h} \cdot e^{\lambda t}$$

Behelyettesítve az $\dot{\underline{y}} = \underline{\underline{A}} \underline{y}$ egyenletrendszerbe:

$$\lambda \cdot \underline{h} \cdot e^{\lambda t} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{h} \cdot e^{\lambda t}$$

A szokásos alakba rendezve és a **h** sajátvektort kiemelve kapjuk:

$$\underline{h} \cdot (\underline{\underline{A}} - \lambda \cdot \underline{\underline{E}}) = \underline{0}$$

Ebben a kifejezésben a **h** vektor $2 \times N$ elemű oszlopvektor, az **A** rendszer-mátrix és az **E** egység-mátrix $(2 \times N) \times (2 \times N)$ elemű négyzetes mátrixok. Az **E** egység-mátrixra azért van szükség, mert az **A** mátrixból nem lehet a λ skalár számot kivonni, azt mátrixszá kell konvertálni az **E** egység-mátrix segítségével. Ha kifejtjük a fenti vektor-mátrix szorzatot, $2 \times N$ db lineáris algebrai egyenletet kapunk, amelyek homogén lineáris algebrai egyenletrendszert alkotnak, mert a jobboldalon mind zérusok állnak. Az egyenletrendszerben az ismeretlenek a $\underline{h}_i$, $i=1, \dots, 2 \times N$ számértékek, az együtthatók az $(\underline{\underline{A}} - \lambda \cdot \underline{\underline{E}})$ mátrix elemei. Ismert dolog, hogy a

homogén lineáris algebrai egyenletrendszernek csak akkor van a triviális megoldástól (minden $\mathbf{h}_i$ megoldás zérus) eltérő megoldása, ha az együtthatók által alkotott mátrixhoz tartozó determináns kifejtésének eredménye zérus:

az együtthatókat tartalmazó mátrix: $\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}$

a hozzátartozó determináns értéke: $\det \underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}} = 0$

A determináns kifejtésének eredménye λ -nak $2 \times N$ fokú polinómja, amelyet **karakterisztikus polinómnak** neveznek:

$$a_{2N} \cdot \lambda^{2N} + a_{2N-1} \cdot \lambda^{2N-1} + a_{2N-2} \cdot \lambda^{2N-2} + \dots + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0$$

Ennek a polinómnak $2 \times N$ gyöke van: λ_i , $i=1, \dots, 2 \times N$. Ezeket az $\mathbf{A}$ rendszermátrix **sajátértékeinek** nevezzük. Ezek többnyire komplex számok:

$$\lambda_i = a_i + j \cdot b_i,$$

de előfordulnak bizonyos esetekben valós sajátértékek is. A valós $\mathbf{a}_i$ összetevő a dinamikai modell csillapítására ad felvilágosítást, a képzetes $\mathbf{b}_i$ összetevő a modell sajátkörfrekvenciáját adja meg:

$$\alpha_i^{r/s} = b_i$$

és az i -ik sajátfrekvencia: $f_i^{Hz} = \frac{\alpha_i}{2 \cdot \pi}$

Minden kiszámított λ_i sajátértékhez meghatározhatjuk a hozzátartozó ismeretlenek $\underline{h}_i$ vektorát, amely $2 \times N$ elemű vektor. A $\underline{h}_i$ vektorokat **sajátvektoroknak** nevezzük. Homogén lineáris algebrai egyenletrendszerrel lévén szó, egy ismeretlen értékét szabadon felvehetjük, általában 1,0-nak szokták felvenni (enélkül a homogén egyenletrendszer határozatlan!) és az i -ik $\underline{h}_i$ vektor értékei közül az első:

$$h_{i,1} = 1,0$$

majd ehhez a vektor többi összetevőjét kiszámíthatjuk. Az így kapott $\underline{h}_i$ sajátvektor elemei adják meg a λ_i sajátértékhez tartozó lengésképet.

A λ sajátértékek és $\underline{h}$ sajátvektorok gyakorlati meghatározása csak numerikus módszerrel történhet, mivel a karakterisztikus polinóm 2 szabadságfoktól felfelé már legalább negyedfokú, tehát a gyökei zárt alakban már nem határozhatók meg. Ilyen numerikus módszer pl. a **Bairstowe** módszer. A gyakorlatban olyan numerikus algoritmusok használata terjedt el, amelyek az $\mathbf{A}$ rendszermátrix elemeiből közvetlenül határozzák meg valamely alkalmas iterációs módszer (pl. [11.-656. o.]) segítségével a $2 \times N$ darab λ sajátértéket és $\underline{h}$ sajátvektort.

2.4.4 A paramétervektor, a kritériumvektor, a jármű üzemkézsége

A 2.4 fejezetben s járműmodell mozgásegyenletrendszerét átalakítottuk a jóval tömörebb mátrix-vektoros alakba:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{x}} + \underline{\underline{D}} \cdot \dot{\underline{x}} + \underline{\underline{S}} \cdot \underline{x} = \underline{g}(t)$$

majd bevezetve az $\underline{y} = [\dot{\underline{x}} \mid \underline{x}]^T$ állapotvektor fogalmát, összeállítottuk az **A** rendszermátrixot, és így a modell mozgásegyenletrendszerének elsőrendű differenciálegyenletrendszerre transzformált alakja a következő lett:

$$\dot{\underline{y}} = \underline{A} \cdot \underline{y}$$

Ez a differenciálegyenletrendszer azt fejezi ki, hogy a **g(t)** gerjesztésvektorból hogyan határozható meg a dinamikai modell $\underline{x}(t)$ válaszfüggvény-vektora. Szokás ezt a folyamatot az alábbi **operátoros alakba** is átírni:

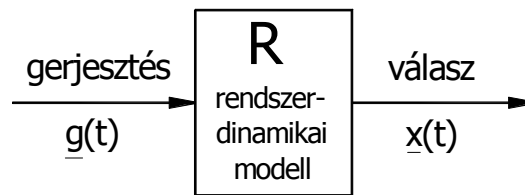
$$\underline{x}(t) = \mathbf{R} \underline{g}(t)$$

ahol **x(t)**: a már bemutatott elmozdulásfüggvény-vektor;

R: a dinamikai modell rendszer-operátora, amely egyesíti magában a differenciálegyenletrendszert, a rendszer paramétereit, stb.;

g(t): a már bemutatott gerjesztőfüggvény-vektor.

Ebben a tömör felírásban az **R** operátor azt jelképezi, hogy a dinamikai modell mozgásegyenleteit milyen módon kell felhasználni akkor, ha a **g(t)** gerjesztésvektor segítségével a modell válaszát, az $\underline{x}(t)$ függvény-vektort meghatározzuk. Így a rendszerdinamikai modell számára a **g(t)** vektorfüggvény az input, az **x(t)** vektorfüggvény a válasz, tehát az output. Az operátoregyenlet megoldásának folyamatát a 2.9. ábra szemlélteti:



2.9. ábra

Azáltal, hogy az **R** operátor tartalmazza a dinamikai modell mozgásegyenleteit, tartalmazza a modell (a jármű, a pálya és egész környezete) minden adatát is, pl. a jármű m_j tömegét, az egyes kerekek aktuális R_i gördülőkör-sugarát, a vizsgált pálya $e(s)$ úthossz-emelkedő-lejtő hosszszelvényét, stb. Ezeket az adatokat a dinamikai modell *paramétereiként* vehetjük tekintetbe, és egyetlen vektorba, az N_p méretű *paraméter-vektorba* foglalhatjuk össze:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} m_j \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ e(s) \\ z_p(s) \\ \dots \end{bmatrix} = [p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_{N_p}]^T$$

ahol: m_j : a dinamikai modell j-ik tömegelemének a tömege;

R_i : az i-ik vasúti kerék gördülőkörének sugara;

$e(s)$: a vizsgált pálya emelkedő-lejtő-hosszszelvénye, amit általában (s_i, e_i) számpárok halmazával adnak meg;

$z_p(s)$: a vizsgált pálya függőleges pályahibái az út függvényében, amit szintén $(s_i, z_{p,i})$ koordinátpárok halmazával lehet megadni,

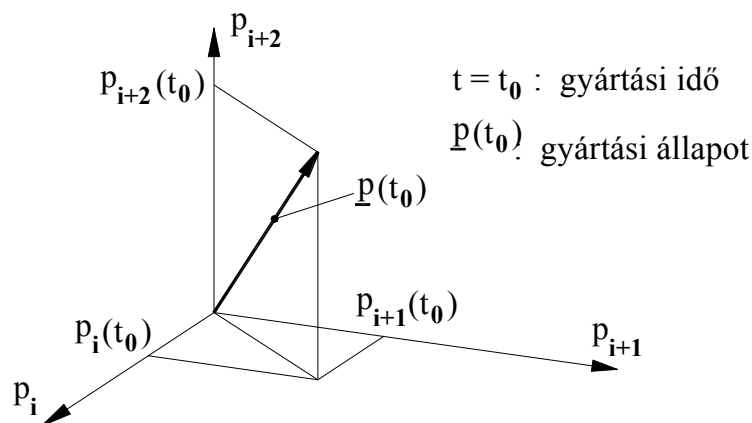
stb.

Ebből a vázlatos felsorolásból is látszik, hogy a paramétervektor $\mathbf{N}_p$ mérete esetenként igen nagy lehet.

A jármű üzeme során a paraméterek legtöbbje valamilyen formában és mértékben változik. Az R_i gördülőkör-sugár csökken a kerékkopás miatt, a $z_p(s)$ pályahiba-függvény értékei is nőnek a pálya elhasználódása során, stb. Ezek közül némelyek folyamatosan (és általában lassan) változnak, pl. az R_i gördülőkör-sugár, vagy egy gumirugó jelleggörbéje a gumianyag öregedése során, mások ugrásszerűen változnak, mint egy acél tekercsrugó merevsége, ha eltörik. Ez azt jelenti, hogy gyakorlatilag a paramétervektor minden eleme az idő függvénye:

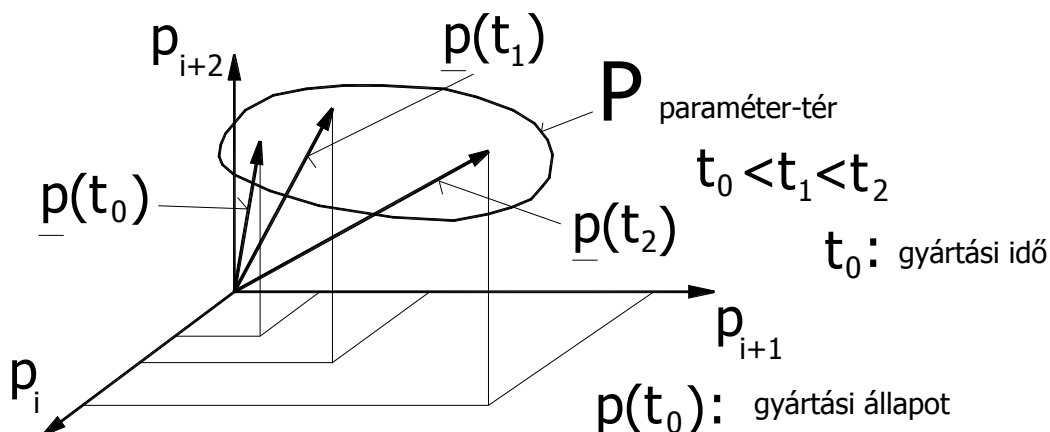
$$\mathbf{p}(t) = [p_1(t), p_2(t), \dots, p_i(t), \dots, p_{N_p}(t)]^T$$

Mivel a paramétervektor minden eleme az idő függvénye, a paramétervektor is változik az idő függvényében. Ezt a változást úgy szemléltethetjük, hogy olyan koordináta-rendszerben ábrázoljuk az egyes paramétervektorokat, amelyben a tengelyekre az egyes paramétervektor-összetevőket (paramétereket) mérjük fel. Természetesen a nagyszámú paraméterből csak hármat használhatunk fel, legyenek ezek a $\mathbf{p}_i(t)$, $\mathbf{p}_{i+1}(t)$ és $\mathbf{p}_{i+2}(t)$ paramétervektor-összetevők, amelyek értékei a $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N_t}$ diszkrét időpontokhoz tartoznak. A 2.10 ábra a $t = t_0$ időponthoz tartozó $\underline{\mathbf{p}}(t_0)$ paramétervektort mutatja be, ezt az időpontot tekinthetjük a gyártás idejének:



2.10 ábra

Ha a kezdeti $t = t_0$ időpontot a gyártás időpontjának tekintjük, akkor az egyes $\mathbf{p}_1(t_0), \dots, \mathbf{p}_i(t_0), \dots, \mathbf{p}_{N_p}(t_0)$ paraméterek (jármű és pálya adatok) is a gyártási állapothoz tartoznak, tehát a $\underline{\mathbf{p}}(t_0)$ paramétervektor szintén a gyártási állapotot tükrözi. Ahogy az üzemidő halad előre ($t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N_t}$), úgy változnak a jármű-pálya paraméterek is (alkatrész-kopások, deformációk, stb.), ennek következtében a paramétervektor is. A 2.11 ábrán bemutatjuk a $\underline{\mathbf{p}}(t)$ paramétervektor változását az idő függvényében (az ábrázolhatóság kedvéért itt is csak három paraméter elem: $\mathbf{p}_i(t)$, $\mathbf{p}_{i+1}(t)$ és $\mathbf{p}_{i+2}(t)$ függvényében), az üzemidő t_0, t_1 és t_2 értékei esetén (ahol $t_0 < t_1 < t_2$), így a 2.11 ábrát kapjuk:



2.11 ábra

Látható az ábrán, hogy a kiragadott három diszkrét időponthoz tartozó $\underline{p}(t_0)$, $\underline{p}(t_1)$ és $\underline{p}(t_2)$ paramétervektorok végpontjai a tér meghatározott részében, a $\mathbf{P}$ paramétertérben mozognak (nem feltétlenül valamilyen meghatározott görbe felületen!). Mivel a t idő folytonosan változik, a $\mathbf{P}$ paramétertér sem csak diszkrét pontokból áll. Végülis írhatjuk, hogy általában a $\underline{p}(t)$ paraméter-vektorok a $\mathbf{P}$ paraméter-tér elemei:

$$\underline{p}(t) \in \mathbf{P}$$

Ahogy az üzemidő folyamán a $\underline{p}(t)$ paraméter-vektorok végpontjai a $\mathbf{P}$ paraméter-térben mozognak, az összetevőik (a jármű paraméterei, tehát adatai) ugyancsak változnak az idő folyamán (a kerekek kopnak, tehát $\mathbf{R}_i$ csökken, a regisztrált pályahibák nőnek, stb.). Így a paraméterek megváltozása a jármű jellemzőit is befolyásolja. Így például ha az egyes hordrugók jelleggörbéi különböző mértékben változnak, ez leronthatja a kisiklással szembeni biztonságot, a növekvő kereszt- és függőleges irányú pályahibák miatt a jármű futásának minősége romlik, stb. A járműüzemi gyakorlat e paraméter-változásokkal szemben rendszerint felállít bizonyos feltételeket – az elterjedt elnevezéssel élve „kritériumokat” – amelyek teljesülését időnkint ellenőrzik, és a jármű csak akkor üzemeltethető tovább, ha e kritériumok ki vannak elégítve. De ha már nincsenek kielégítve, akkor megfelelő javító-karbantartó műveleteket kell elvégezni.

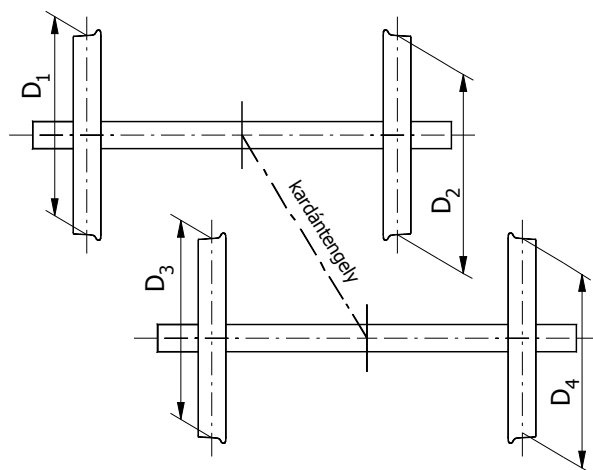
Meg kell jegyezni, hogy egy adott kritériumra különböző megengedett értékek lehetnek érvényben, pl. a $\mathbf{W}$ futásjósági számra – lásd a következőkben – vasúti személy. és teherkocsik számára eltérő értékeket követelnek meg.

A vasúti járművekre a jelenlegi karbantartási-fenntartási gyakorlat kialakította az ellenőrzendő műszaki kritériumokat. Ezeket a kritériumokat a [3] szakirodalmi forrásmű tárgyalja részletesen. Két csoportra oszthatók:

a/ egyszerű kritériumok, amelyek a diagnosztikai mérések adataiból egyszerű aritmetikai művelettel kaphatunk meg;

b/ összetett kritériumok, amelyek a diagnosztikai mérések adataiból csak összetett számításokkal lehet meghatározni, ill. csak a komplett járművön végrehajtott mérések eredményeiből kaphatjuk meg.

Az egyszerű kritériumra példa lehet az, hogy az összekapcsolt hajtású kerékpárok (pl. a kardánhajtású kerékpárok) egyes kerekeinek a névleges gördülőkör-átmérő között a legnagyobb különbség **0.5 mm lehet** ([3]-341. o.), a 2.12 ábra mutatja be az ilyen hajtás vázlatos elrendezését:



2.12 ábra

Az ábrán két kerékpár van összekapcsolva egy összekötő kardántengellyel (megjegyezzük, hogy teljesen hasonló eset áll fenn, ha egy fogaskerék-hajtás képezi a kapcsolatot, mint pl. a V43 típusú villamosmozdony monomotoros forgóvázában). A négy kerékátmérő közül a $D_{\max}$ a legnagyobb érték:

$$D_{\max} = \text{Max}(D_1, D_2, D_3, D_4)$$

és a legkisebb:

$$D_{\min} = \text{Min}(D_1, D_2, D_3, D_4)$$

és az előírt kritérium:

$$\Delta D_{\max} = D_{\max} - D_{\min} \leq 0.5 \text{ mm}$$

Az ilyen fajta kritériumokat viszonylag egyszerű méréssel (a névleges gördülőkör átmérőjének megmérésével) lehet ellenőrizni.

Az összetett kritériumokra példa lehet az n_k kisiklásbiztonsági szám ([1], [2], [6] - 570. o.), vagy a W_z függőleges, ill. W_y vízszintes keresztirányú futásjósági szám ([6]-581. o., [7]). Ezek a kritériumok már az egész járművet, illetve az egész jármű futóművét, kerékpárfelfüggesztését, stb. minősítik. A részleteket meg lehet találni a hivatkozott szakirodalmi forrásművekben. Itt röviden csak a legszükségesebb ismereteket elevenítjük fel és annyit említünk meg, hogy az n_k kisiklásbiztonsági szám a sínről az egyes kerekre ható keresztirányú Y vezetési erőnek és a kerékről a sínre ható függőleges Q kerékterhelésnek a hányadosa:

$$n_k = \frac{Y}{Q} \leq 1.0$$

amelynek értéke nem haladhatja meg az **1.0-t**, vagyis az Y vezetési erő nem lépheti túl a Q függőleges kerékterhelést.

Ez a kritérium a névleges, statikus vezetési és kerékterhelési erőkre vonatkozik, amikor a jármű kis sebességgel gördül át egy pályaíven, illetve az ívből kifutó, előírt lejtésű átmeneti íven, aminek következtében a vezető keréknél a függőleges kerékterhelés lecsökken. A csökkenés mértékét (és ennek következtében n_k értékének változását) főleg a függőleges csapágy-felfüggesztő rugók merevsége, valamint a szekrény és a forgóváz torziós merevsége szabja meg, de a szekrény és a forgóváz felfüggesztése is befolyásolja, továbbá az alváznak, illetve a forgóvázkeretnek az üzem során bekövetkező esetleges vetemedése is. Az n_k kisiklásbiztonsági szám meghatározása történhet vonali mérések eredményeinek felhasználásával, vagy a

jármű ívben futásának számítógépes szimulációjával, felhasználva a jármű kerékfelfüggesztő rugójának, illetve a vázszerkezet vetemedésének mérési adatait.

A függőleges W_z és keresztirányú W_y futásjósági számot úgy határozhatjuk meg, hogy a vizsgált járműnek egy megadott pályán való végigfutása közben mérjük a kocsiszekrény függőleges $a_{sz}(t)$ és vízszintes keresztirányú $a_{sy}(t)$ gyorsulásfüggvényét. A mért gyorsulásfüggvényekből a futásjósági számokat a következő képlettel határozhatjuk meg ([7] - 369. o.):

$$W = \left(2 \cdot [a_{sz}(t)]^2_{eff} \right)^{3/20}$$

ahol $a_{sz}(t)$ a mért $a_{sz}(t)$ függőleges, illetve keresztirányú $a_{sy}(t)$ gyorsulásfüggvénynek az ú. n. „élettani szűrővel” megszürt függvénye mind a függőleges, mind a keresztirányú esetre, majd ezekből a függvényekből az effektív, vagy „RMS” értékeket képezni és behelyettesíteni a képletbe, majd a kapott számértékeket a szokásos 1 – 5 terjedelmű skálán kell értékelni.

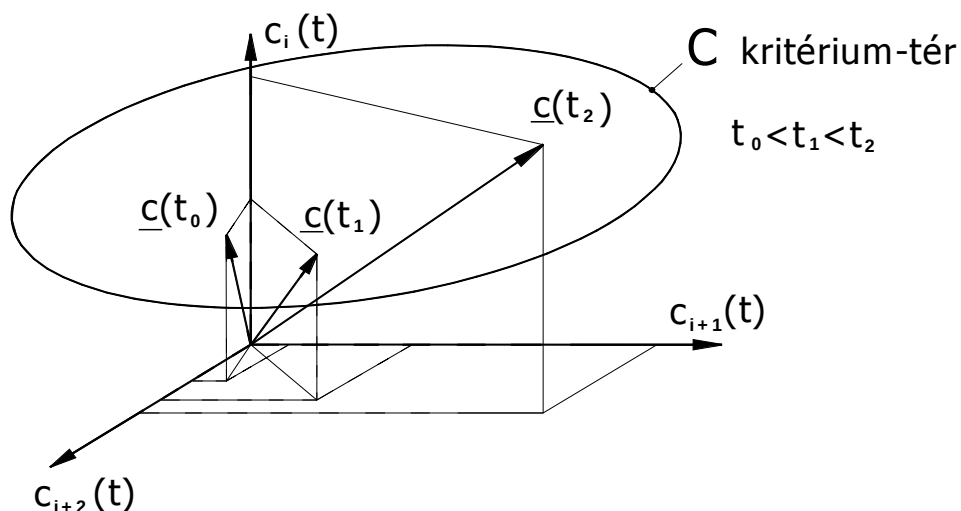
A kerékátmérő-különbség, a kisiklásbiztonsági szám és a futásjósági szám csak néhány lehetséges példa az egyszerűbb és összetettebb kritériumokra, rajtuk kívül a gyakorlati üzem még sok más kritériumot is figyelembe vesz. Az összes figyelembe vett kritériumot – a paraméterekhez hasonlóan – egy N_c méretű vektorba, az ú. n. **kritérium-vektorba** foglalhatjuk össze (nem feledkezve meg arról, hogy a kritérium-vektor elemei is az idő függvényei):

$$\mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} \Delta D_{\max} \\ \dots \\ n_k \\ \dots \\ W_y \\ W_z \\ \dots \end{bmatrix} = [c_1(t), \dots, c_i(t), \dots, c_{N_c}(t)]^T$$

A paraméter- és a kritériumvektor együttesen adnak teljes képet egy jármű műszaki állapotáról és üzemképességéről: a paraméter-vektor elemei a műszaki állapotot határozzák meg, a kritérium-vektor elemeiből az üzemképességre következtethetünk. Nyilvánvaló, hogy a kritérium-vektor elemeire határértékeket kell meghatározni, mivel a megfelelő üzemképességet úgy bírálhatjuk el, hogy ellenőrizzük a kritériumvektor összes elemét, hogy **nem lépték-e túl** a megengedett határértéket.

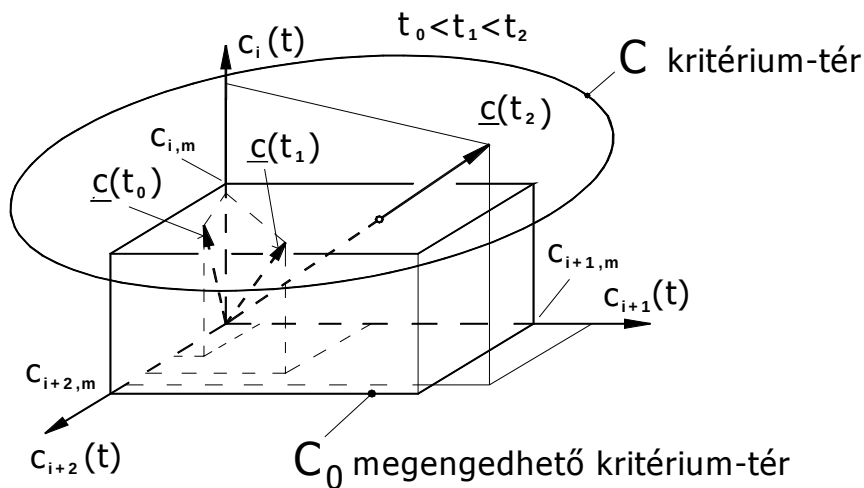
A kritériumvektor elemei az idő függvényei, mivel a jármű üzeme során változnak a paramétervektor elemei (kopások, a pálya romlása, stb.) és emiatt a kritériumok is (kerékátmérő-különbség, kisiklásbiztonság, stb.) változnak és így a kritériumvektor is az idő függvénye lesz: $\mathbf{c}(t)$, és a paramétervektorhoz hasonló meghatározott térben fog mozogni. Ha az időben változó kritériumvektort koordináta-rendszerben ábrázoljuk, akkor – a paramétervektorokhoz hasonlóan – csak három koordinátát (kritériumot) rajzolhatunk meg (2.13 ábra), ezek a $\mathbf{c}_i$, $\mathbf{c}_{i+1}$ és $\mathbf{c}_{i+2}$ lehetnek. Hasonlóan a paramétervektorok ábrázolásához, a 2.13 ábrán csak három diszkrét időponthoz (t_0 , t_1 , t_2) tartozó kritériumvektort tüntettünk fel, ezek között a $\mathbf{c}(t_0)$ a gyártási állapothoz tartozik, a $\mathbf{c}(t_1)$ és $\mathbf{c}(t_2)$ kritériumvektorok a jármű üzemének két későbbi, a $t = t_1$ és $t = t_2$ időpontjához tartozó járműállapotot tükrözik. Az idő folyamán változó kritériumvektorok végpontjai a **C kritériumteret** alkotják, tehát írható:

$$\mathbf{c}(t) \in C$$



2.13 ábra

Ahogy a kritériumvektor elemei (az egyes kritériumok) változnak és a kritériumvektor végpontja mozog a C kritériumtérben, az egyes kritériumok meghaladhatják a számukra előírt határokat ($\Delta D_{\max}$ túllépheti a 0,5 mm-es határt, a kisiklásbiztonsági szám veszélyesen megközelítheti az 1,0-t, stb.), az ilyen kritériumvektor már nem engedhető meg, **ez a járműállapot már nem elégíti ki az üzemkészség feltételét**. Ezt úgy ábrázolhatjuk, hogy a 2.13 ábrán látható ábrázoláshoz hasonlóan a 2.14 ábrán feltüntetjük az ábrázolt kritériumokhoz (a kritériumvektorok összetevőihöz) tartozó üzemkészségi korlátokat is, ezek: $c_{i,m}$, $c_{i+1,m}$ és $c_{i+2,m}$. Ezek a korlátok adják meg azt a térrészt, amelyet a megfelelő üzemkészséget képviselő összes lehetséges kritériumvektor foglal el:



2.14 ábra

A 2.14 ábrán ezt a térrészt neveztük a **C_0 megengedhető kritériumtérnek**. (Általában háromnál jóval több kritérium (háromnál jóval több összetevőjű kritériumvektor) érvényes egy adott jármű-pálya rendszerre, az ábrán csak az ábrázolhatóság érdekében tételeztünk fel három összetevőt.)

Látható az ábrán, hogy a t_0 és t_1 időpontokban a $c(t_0)$ és $c(t_1)$ kritériumvektorok egyik összetevője sem lépte túl a $c_{i,m}$, $c_{i+1,m}$ és $c_{i+2,m}$ kritériumkorlátokat, tehát a $c(t_0)$ és $c(t_1)$ kritériumvektorok által képviselt járműállapotok **üzemkészsége megfelelő**. (Geometriaileg egyik vektor végpontja sem lépett ki a C_0 megengedhető kritériumteret jelképező hasápból.) Viszont

a t_2 időponthoz tartozó $\underline{c}(t_2)$ kritériumvektor $c_i(t_2)$ és $c_{i+1}(t_2)$ összetevője igen, tehát ez a kritériumvektor kilép a C_0 megengedhető kritériumteret szemléltető téglatestből.

Mivel a megfelelő műszaki üzemkésztség biztosításához az szükséges, hogy a kritériumvektor egyetlen összetevője se – tehát egyetlen kritérium se – lépje túl a megadott kritériumhatárokat, ennek megfelelően a $t = t_0$ és $t = t_1$ időpontokban a $\underline{c}(t_0)$ és $\underline{c}(t_1)$ kritériumvektorok által képviselt üzemkésztség még megfelelő, de a $t = t_2$ időpontban a $\underline{c}(t_2)$ kritériumvektorhoz tartozó üzemkésztség már nem. Általánosságban azt mondhatjuk, hogy a jármű üzemkésztsége akkor megfelelő, ha a $\underline{c}(t)$ kritériumvektor minden t időpontban **benne van a C_0 megengedhető kritériumtér-halmazban**, amit a következő módon lehet kifejezni:

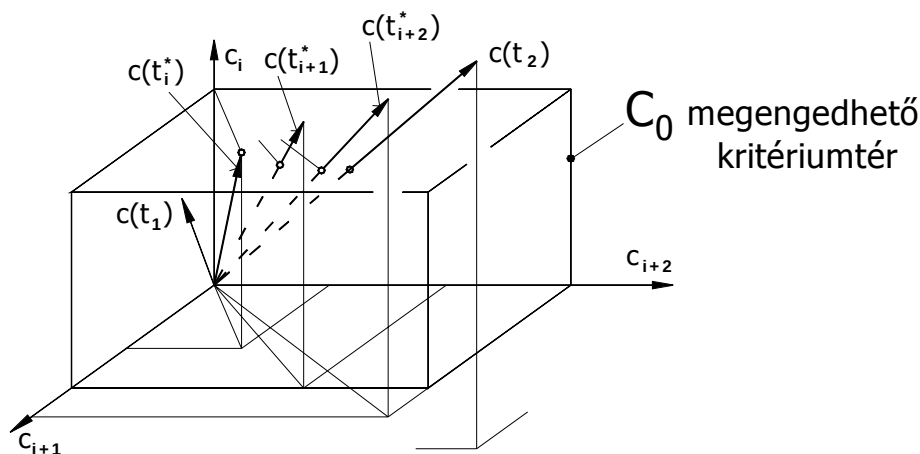
$$\underline{c}(t) \in C_0 ;$$

és mivel a C_0 tér csak egy része az összes lehetséges kritériumvektor által alkotott C kritériumtérnek, írható, hogy:

$$\underline{c}(t) \in C_0 \subset C$$

Ezt az összefüggést tekinthetjük a diagnosztikai döntéshozatal matematikai megfogalmazásának. Amint ez a feltétel **nem teljesül**, a jármű üzemkésztsége **már nem megfelelő**.

Az is megfigyelhető a 2.14 ábrán, hogy a kritériumvektor egyes összetevői nem ugyanabban az időpontban lépik túl a hozzá tartozó kritériumhatárt. A 2.15 ábra részletesebben mutatja be azokat az időpontokat, amelyekben a kritérium-összetevők meghaladják a korlátokat. Tételezzük fel, hogy a $\underline{c}(t_1)$ kritériumvektor egyetlen kritérium-összetevője sem lépi túl a korlátokat, míg a $\underline{c}(t_2)$ kritériumvektor mindhárom összetevője meghaladja azokat. Tegyük fel, hogy $t = t_i^*$ -ben a $c_i(t_i^*)$ összetevő éri el a határt, $t = t_{i+1}^*$ -ben a $c_{i+1}(t_{i+1}^*)$ kritérium-összetevő, végül $t = t_{i+2}^*$ -ben a $c_{i+2}(t_{i+2}^*)$.



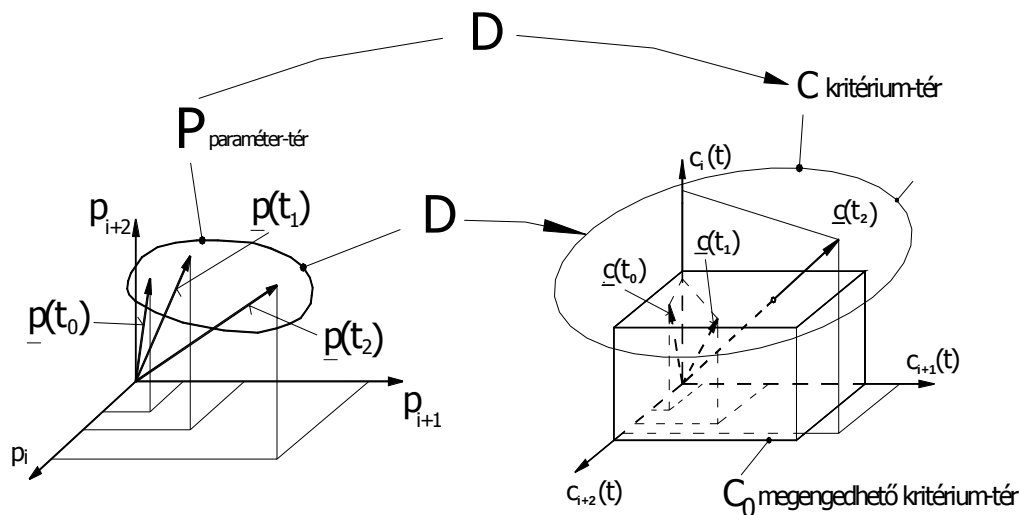
2.15 ábra

A t_i^* , t_{i+1}^* és t_{i+2}^* időpontok meghatározása – vagy legalábbis előrejelzése – szükséges volna a járműdiagnosztikai döntéshozatal pontosítása, illetve finomítása céljából, hogy a javítási-kezelési igény fellépésének időpontját minél pontosabban és megbízhatóbban meg lehessen határozni. Ehhez meg kell vizsgálni azt a folyamatot, ami a jármű aktuális paramétereinek adataitól a kritériumvektor elemeinek értékeihez vezet. Az egyes kritériumok meghatározásának számítási módja meg van adva. A dinamikai modell mozgásegyenletrendszere segítségével egyrészt megkaphatjuk bizonyos paraméterek megváltozott értékét (pl. a gördülőkör-sugarak aktuális értékét az abroncs kopásának számítógépes szimulációja útján), másrészt a megváltozott paraméterek segítségével az egyes kritériumok is számíthatók. Ez tehát a kritériu-

mokra nézve explicit módszer, így a kritériumok közvetlenül számíthatók. Ennek a számításnak a menetét az alábbi tömör alakban írhatjuk fel:

$$\underline{c}(t) = \mathbf{D} \mathbf{p}(t) ;$$

ahol a $\mathbf{D}$ operátor tartalmazza a kritériumvektor összes elemének számítási algoritmusát, amelynek a bemenő adata a $\mathbf{p}(t)$ paramétervektor. Így a $\mathbf{D}$ operátor kapcsolatot képez a $\mathbf{C}$ kritériumtér és a $\mathbf{P}$ paramétertér között. Ezt a kapcsolatot a 2.16 ábra szemlélteti.



2.16 ábra

Ha a kritériumvektor egy megadott értékéhez meg kívánnánk határozni a hozzá tartozó paramétervektort, a következő operátoregyenletet kellene megoldani:

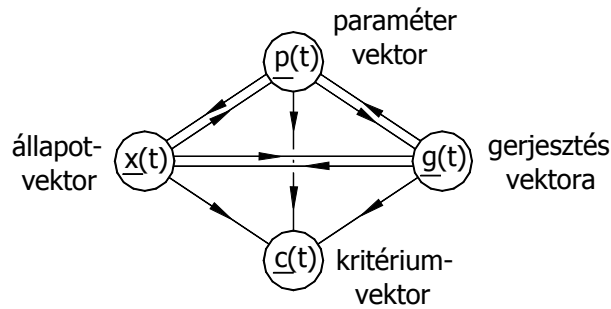
$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{c}(t) ;$$

Ehhez ismerni kellene a $\mathbf{D}^{-1}$ inverz operátort, de a kritériumvektor számítási módjának összetettsége miatt ez gyakorlatilag lehetetlen. Ebből következik, hogy a kritériumvektornak a $\mathbf{C}_0$ megengedhető kritériumtérből való kilépési időpontjához tartozó paramétervektort csak iterációs próbálkozással, csak bizonyos pontossági tűréssel kaphatjuk meg. A gyakorlati esetek néhány számítási lehetőségéről a 6. Oktatási segédletben találhatunk többet.

Meg kell még említeni, hogy noha mind a $\mathbf{p}(t)$ paramétervektor, mind a $\underline{c}(t)$ kritériumvektor az idő függvénye, a változási sebességük azonban sok esetben erősen különböző. A paramétervektor összetevői általában lassan változnak, pl. a kerekek gördülőkör átmérője viszonylag lassan kopik. Bizonyos kritériumvektor-összetevők viszont sokkal gyorsabban változnak, pl. a hordrugó sérülése miatt bekövetkező rugómerevség-csökkenés miatt a kisiklásbiztonsági szám hirtelen a veszélyes határérték fölé növekedhet, ezért írható:

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} \lll \frac{d\mathbf{c}(t)}{dt}$$

Végül fel kell a figyelmet hívni arra a jellegzetes kölcsönhatásra, ami a paramétervektor, a kritériumvektor, valamint a pálya-jármű rendszer állapotvektora (a tömegelemek elmozdulása és sebessége) és a tömegelemekre ható gerjesztő hatások között áll fenn. A kölcsönhatás sémáját a 2.17 ábrán láthatjuk.



2.17 ábra

A kölcsönhatás azon alapul, hogy a paramétervektor bizonyos összetevői egyidejűleg a gerjesztésvektor összetevőiként is szerepelnek. Ilyen pl. a jármű kerékpárjának függőleges sebessége, amely paraméter-összetevő és ugyanakkor állapotvektor-összetevő is, de mivel a kerék és a sín függőlegesen kapcsolódnak, ezért ez pálya-sebesség is, ez pedig ugyanakkor a jármű szempontjából gerjesztés-összetevő is. A jármű tömegelemeinek függőleges sebessége és a gerjesztés között így egyfajta kölcsönhatás áll fenn, amely kiterjed a paramétervektor összetevőin át a kritériumvektor összetevőire is. Így áll elő a 2.17 ábrán látható többirányú kölcsönhatás az elmozdulások, a sebességek, a paraméterek, a gerjesztés és a kritériumok között.

Összefoglalásképpen megismételhetjük a diagnosztikai döntéshozatalnak az előbbieken bemutatott matematikai megfogalmazását az alábbi alakban:

$$D \ p(t) = c(t) \in C_0 \subset C$$

tehát a jármű-pálya rendszer paraméter-összetevőiből meghatározott kritérium-összetevőkről el kell dönteni, hogy nem lépnek-e ki a megengedett C_0 kritérium-térből. **A megfelelő üzemi-készség feltétele, hogy a kritériumok a C_0 téren belül maradjanak.**